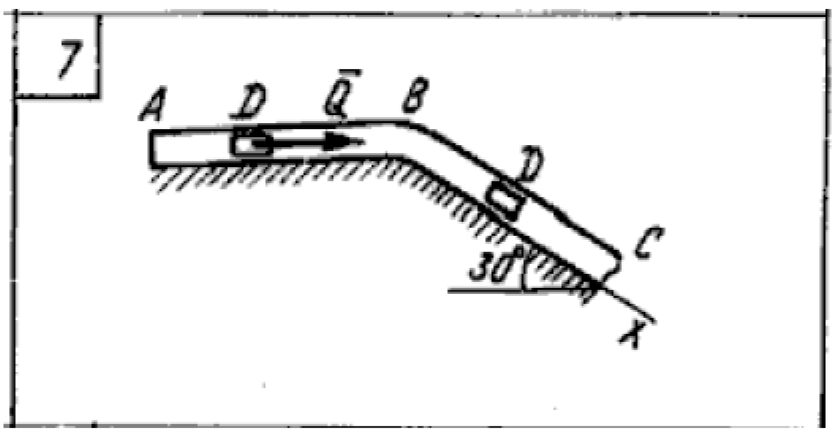
Задача Д1
Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость $\vec{V}_0$, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1). На участке AB на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза (направлена против движения).

В точке B груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в табл. Д1.

Дано:

$m := 1.6$ кг $\quad V_0 := 18\ \frac{м}{с}$ $\quad Q := 4$ Н $\quad R := 0.4 \cdot V$ $\quad t_1 := 2$ с $\quad F_x = -3 \cdot \sin(4 \cdot t)$



Участок AB:

Дифференциальное уравнение движения на участке AB:

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{Q}{m} - \frac{0.4}{m} \cdot V_z$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{4}{1.6} - \frac{0.4}{1.6} \cdot V_z$$

$$\frac{dV_z}{dt} = 2.5 - 0.25 \cdot V_z$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\left(0.25 \cdot V_z - 2.5\right)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -0.25 \cdot \left(V_z - 10\right)$$

$$\frac{dV_z}{V_z - 10} = -0.25 \cdot dt$$

$$\frac{d\left(V_z - 10\right)}{V_z - 10} = -0.25 \cdot dt$$

Интегрируем:

$$\ln\left(V_z - 10\right) = -0.25 \cdot t + C_1$$

$$V_z - 10 = e^{\left(-0.25 \cdot t + C_1\right)}$$

$$V_z = e^{\left(-0.25 \cdot t + C_1\right)} + 10$$

Подставляем начальные условия: $t := 0$ $V_z = V_0$

$$V_0 = e^{\left(C_1\right)} + 10$$

$$C_1 := \ln\left(V_0 - 10\right) = 2.079$$

Окончательно имеем:

$$V_z(t) := e^{(-0.25 \cdot t + 2.079)} + 10$$

Скорость в точке B:

$$V_B := V_z\left(t_1\right) = 14.85 \quad \frac{м}{с}$$

Участок BC:

Дифференциальное уравнение движения на участке BC:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt} = \frac{G}{\sin(30)} + F_x$$

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt} = \frac{(m\cdot g)}{\sin(30)} + (-3\cdot\sin(4\cdot t))$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{g}{\sin(30)} + \frac{(-3\cdot\sin(4\cdot t))}{m}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{10}{0.5} + \frac{(-3\cdot\sin(4\cdot t))}{1.6}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = 20 - 1.875\cdot\sin(4\cdot t)$$

Интегрируем:

$$V_x = 20\cdot t + \frac{1.875}{4}\cdot\cos(4\cdot t) + C_2$$

Подставляем начальные условия: $t := 0$ $V_x = V_B$

$$V_B = 0 + \frac{1.875}{4}\cdot 1 + C_2$$

$$C_2 := V_B - \frac{1.875}{4} = 14.381$$

Получаем:

$$V_x = 20\cdot t + 0.469\cdot\cos(4\cdot t) + 14.381$$

Интегрируем:

$$x = \frac{20}{2}\cdot t^2 + \frac{0.469}{4}\cdot\sin(4\cdot t) + 14.381\cdot t + C_3$$

Подставляем начальные условия: $t := 0$ $x = 0$

$C_3 := 0$

Окончательно имеем:

$$x = 10\cdot t^2 + 0.117\cdot\sin(4\cdot t) + 14.381\cdot t$$