3.3. Лабораторная работа № 11
КОЛЕБАНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Теоретическая часть

Колебанием материальной точки называется движение точки повторяемое во времени, которое характеризуется прохождением среднего положения. Сила, старающаяся возвратить материальную точку в среднее положение, называется *восстанавливающей силой*. Восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную направлению отклонения от среднего.

Амплитуда колебаний – величина максимального отклонения точки от среднего положения.

Период колебаний T – промежуток времени, за который происходит одно полное колебание.

Частота колебаний ν, –. число колебаний за еденицу времени, определяется по формуле $\nu = \dfrac{1}{T}$. ***Циклическая частота***

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu .$$

Рассмотрим следующие виды колебаний материальной точки:

1. Гармонические колебания;
2. Свободные затухающие колебания;
3. Вынуждение колебания. Явление резонанса без учета сил сопротивления среды и с учетом этих сил. Биение.

Гармонические колебания

Моделью колебательного процесса являются *гармонические колебания*, происходящие по гармоническому закону.

Рассмотрим материальную точку M массы m, совершающую прямолинейное движение вдоль оси x (рис. 3.21) под действием восстанавливающей силы $\boldsymbol{F_c}$, которая пропорциональна расстоянию от точки до неподвижного центра O

$$\vec{F}_c = -c \cdot \vec{x}$$

где c – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность Н/м.

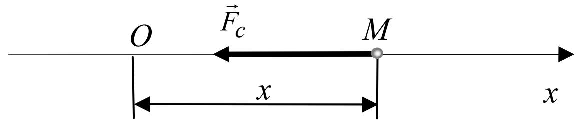

Рис. 3.21. Схема действия сил на точку *M* при гармонических колебаниях

Второй закон Ньютона для материальной точки $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_c$, записанный в дифференциальной форме, называют уравнением гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0, \qquad \text{где } \omega_o = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ - собственная частота.}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$x = A_o\, sin(\omega_o t + \varphi),$$

где A_o и φ – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий: $x(0) = x_o$ - начальная координата, $\dot{x}(0) = V_o$ - начальная скорость. Амплитуда колебаний A_o определяется по формуле $A_o = \sqrt{x_o^2 + \frac{V_o^2}{\omega_o^2}}$, начальная фаза $tg\varphi = \frac{x_o \omega_o}{V_o}$.

График движения точки приведен на рис. 3.22. Амплитуда и период колебаний не изменяются. Полная энергия сохраняется $E_п = E_к + E_p = \frac{m\,\omega_o^2 A_o^2}{2}$.

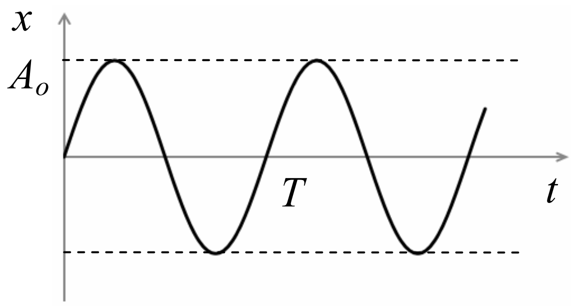

Рис. 3.22. График зависимости смещения точки, совершающей гармонические колебания, от времени

Свободные затухающие колебания

Пусть на материальную точку, совершающую прямолинейное движение, кроме восстанавливающей силы $\boldsymbol{F_c}$ действует *сила сопро-*

тивления среды $\boldsymbol{F_r}$, пропорциональная скорости $\vec{F}_r = -r\vec{V}$ (рис. 3.23). Здесь r – *коэффициент сопротивления.*

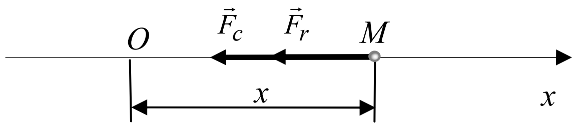

Рис. 3.23. Схема действия сил на точку *M* при затухающих колебаниях

Второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_r$, записанный в дифференциальной форме, называют уравнением свободных колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0, \text{ где } \beta = \frac{r}{2m} \text{ - коэффициент затухания.}$$

Характер движения существенно зависит от соотношения между величинами β и ω_o:

1. Случай малого сопротивления. Если $\beta < \omega_o$, то точка совершает *затухающие колебания*, решение уравнения имеет вид

$$x = Ae^{-\beta t}\, sin(\omega t + \varphi),$$

где $Ae^{-\beta t}$ - амплитуда, $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ - циклическая частота. Наличие сил сопротивления увеличивает период колебаний.

График движения точки показан на рисунке 3.24. Как видно из рисунка, амплитуда колебаний со временем убывает.

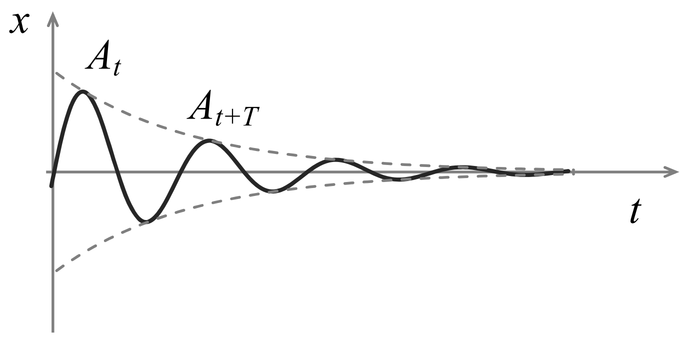

Рис. 3.24. График зависимости координаты точки, совершающей затухающие колебания, от времени

Быстроту убывания амплитуды характеризуют *декремент затухания* $\delta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{Ae^{\beta t}}{Ae^{\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$, *логарифмический декремент затухания* $\lambda = ln\,\delta = \beta T$ и *время релаксации* $\tau = \frac{1}{\beta}$ - время, за которое амплитуда убывает в e раз $\frac{A_t}{A_{t+\tau}} = e^{\beta\tau} = e$.

2. Случай большого сопротивления. Если $\beta \geq \omega_0$, то точка совершает *апериодическое движение*. График одного из вариантов такого движения показан на рисунке 3.25.

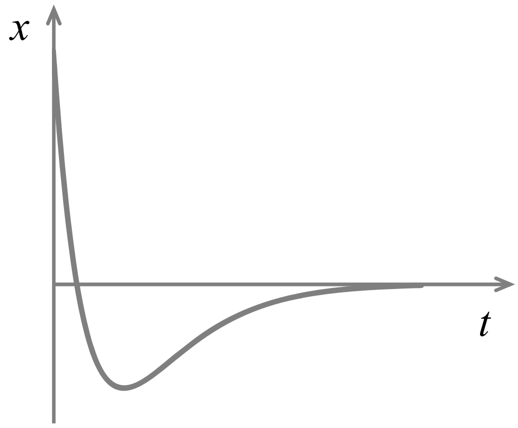

Рис. 3.25. График апериодического движения точки

Вынуждение колебания. Явление резонанса без учета сил сопротивления среды и с учетом этих сил. Биение.

Пусть на точку, совершающую прямолинейное движение, кроме восстанавливающей силы $\boldsymbol{F}_c$ и силы сопротивления $\boldsymbol{F}_r$, действует периодическая *возмущающая сила* $F_в = F_m \sin \omega_в t$, где F_m - амплитудное значение, а $\omega_в$ – частота вынуждающей силы. В этом случае возникают *вынужденные колебания.*

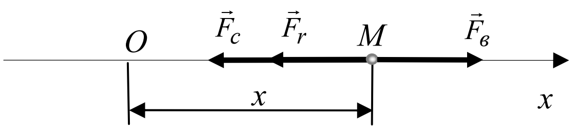

Рис. 3.26. Схема действия сил при вынужденных колебаниях

Второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_к + \vec{F}_в$, записанный в дифференциальной форме, называют уравнением вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = f_m \sin\omega_в t,$$

где $f_m = \dfrac{F_m}{m}$ - удельная амплитуда вынуждающей силы.

Решение уравнения вынужденных колебаний

$$x = x_{своб} + x_{вын}.$$

Слагаемое $x_{своб}$ имеет затухающий характер, поэтому остается

$$x = x_{вын} = A\sin(\omega_в t + \varphi_з), \text{где } A = \frac{f_m}{\sqrt{\left(\omega_о^2 - \omega_в\right)^2 + 4\beta^2\omega_в^2}},$$

которые происходят с частотой вынуждающей силы $\omega_в$ и фазой запаздывания $\varphi_з$ между смещением и приложенной силой.

Рассмотрим случай $\beta = 0$.

а) Рассмотрим случай $\omega_о \neq \omega_в$. Тогда решение уравнения можно записать в виде:

$$x_{вын} = \frac{f_m}{\omega_o^2 - \omega_в^2}\sin(\omega_в t)$$

На рисунке 3.27 показан график движения точки при $p = 1.7k$ при нулевых начальных условиях ($x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$).

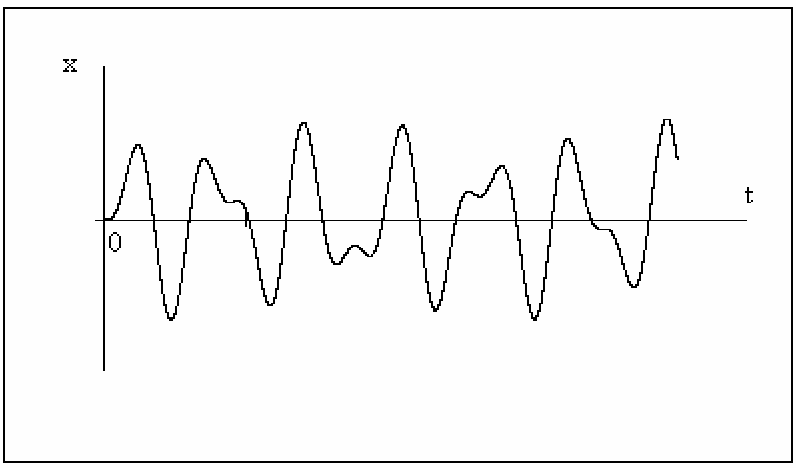

Рис. 3.27. График вынужденных колебаний в общем случае

б) Если частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний ($\omega_о = \omega_в$), то общее решение дифференциального уравнения можно записать в виде:

$$x_{вын} = \frac{f_m}{2\omega_o^2} t \cos(\omega_в t)$$

Как видно из формулы, амплитуда вынужденных колебаний со временем возрастает. Такое явление называется *резонансом*. График движения точки (при нулевых начальных условиях) показан на рисунке 3.28.

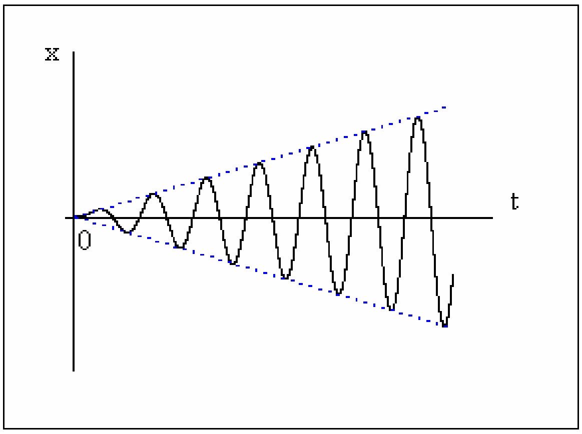

Рис. 3.28. График вынужденных колебаний при $p = k$ (резонанс)

в) Рассмотрим случай, когда частота возмущающей силы мало отличается от частоты собственных колебаний: $\omega_о \approx \omega_в$. Например, на рисунке 3.29 показан график движения точки при $\omega_в = 0{,}9\ \omega_о$. Полученные колебания модулированные по амплитуде называется *биением*.

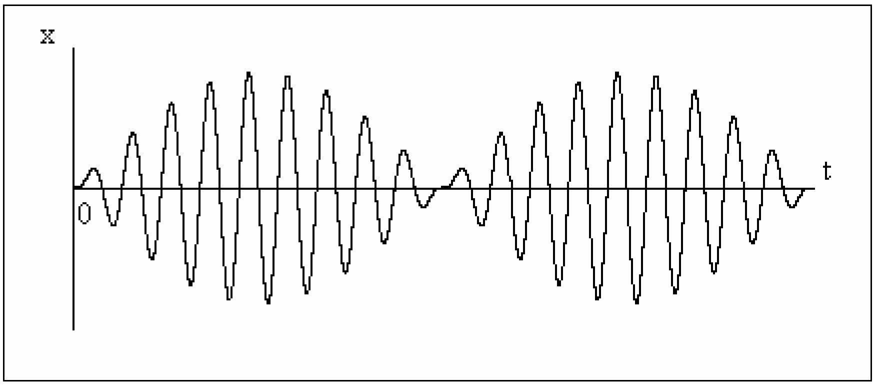

Рис. 3.29. График вынужденных колебаний при $\omega_в = 0{,}9\ \omega_о$ (биение)

Рассмотрим случай $\beta \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний ($\omega_о = \omega_в$), т.е. случай резонанса. График движения точки для этого случая показан на риунке 3.30 при нулевых начальных условиях. Как видно, амплитуда колебаний возрастает только до определенного предела, поскольку сказывается влияние сил сопротивления.

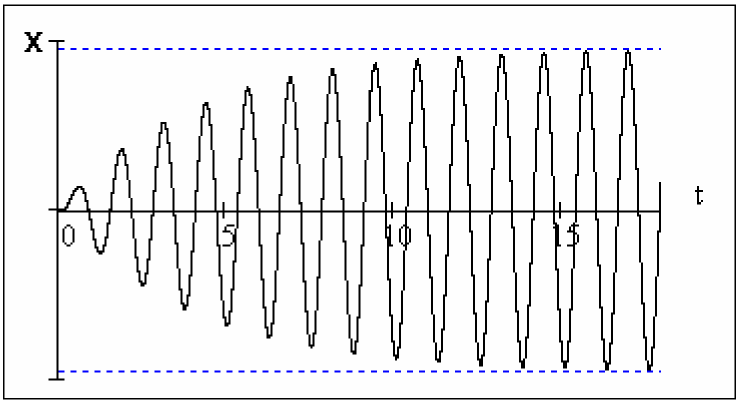

Рис. 3.30. График движения точки при резонансе и наличии силы сопротивления

Постановка задачи, задания

1. Применяя второй закон Ньютона, требуется по заданным силам, действующим на материальную точку массой m, составить дифференциальное уравнение гармонических колебаний точки. Решить это уравнение с помощью пакета MathCAD на интервале времени (0, $t_к$), определить период и амплитуду колебаний. Построить графики движения точки для различных случаев соотношения возмущающей, восстанавливающей сил и силы сопротивления для данного промежутка времени.

Рассмотреть случаи, когда действуют:

1) восстанавливающая сила $F = -c \cdot x$;

2) восстанавливающая сила и сила сопротивления $R = b \cdot V$, определить период и декремент колебаний;

3) восстанавливающая сила и возмущающая сила $P(t) = H \cdot \sin(p \cdot t)$, причем рассмотреть случаи: $p = 1{,}7\ k$, $p = k$, $p \approx k$;

4) восстанавливающая, возмущающая силы и сила сопротивления для случая $p = k$.

Данные, необходимые для расчёта, приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

Данные для решения задачи

Вариант №	m	c	x_0	V_0	b	H	t_k
1	2	20	6	10	1	22	40
2	2	18	8	10	0,2	24	40
3	3	20	6	12	0,5	26	40
4	3	24	8	16	0,7	28	40
5	2,5	40	6	12	1	20	40
6	2,5	20	10	8	1	22	40
7	4	60	5	4	0,4	24	40
8	0,5	10	4	2	0,2	26	40
9	5	80	6	5	0,3	28	40
10	4	50	2	8	1	20	40
11	3	50	2	6	1	22	30
12	2	30	4	8	1,2	24	30
13	5	70	4	10	0,5	26	30
14	4	55	5	7	0,2	28	30
15	3	50	5	8	0,7	20	30
16	2	35	6	10	1	18	30
17	3	45	6	12	1	22	30
18	4	60	3	6	0,5	24	30
19	4	50	3	8	0,5	26	30
20	2	40	8	10	0,5	28	30

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются свободными?
2. Что такое амплитуда колебаний?
3. Что такое период колебаний и частота, их взаимосвязь?
4. Что называется начальной фазой колебаний?
5. Что такое восстанавливающая сила?
6. Какие силы действуют при затухающих колебаниях?
7. Какие колебания называются вынужденными?
8. Какой вид имеет аналитическое решение дифференциального уравнения для свободных колебаний?
9. Что такое резонанс и каковы условия его возникновения?
10. При каком условии возникает явление биения?
11. Условия возникновения апериодического движения?
12. Как соотносятся частоты возмущающей и восстанавливающей сил при явлении резонанса?

13. Как соотносятся частоты возмущающей и восстанавливающей сил при биении?

14. Что такое декремент колебаний?

Оформление отчёта

В отчёт включаются следующие пункты:

1. Условия задачи для своего варианта задания.

2. Дифференциальное уравнение для случая свободных гармонических колебаний и его решение в пакете MathCAD, а также график движения точки, значение амплитуды и периода свободных колебаний.

3. Решение уравнения в пакете MathCAD при наличии восстанавливающей силы и силы сопротивления согласно индивидуальному варианту, значение периода и декремента затухающих колебаний; график движения точки.

4. Решение уравнения в пакете MathCAD при наличии восстанавливающей и возмущающей силы согласно индивидуальному варианту для случаев $p \neq k$, $p = k$, $p \approx k$; графика движения точки для каждого случая.

5. Решение уравнения в пакете MathCAD при резонансе с учётом силы сопротивления; график движения точки, значение амплитуды.

Пример выполнения задания

Постановка задачи

Для материальной точки массой $m = 2$ кг, которая начинает движение при $x_0 = 6$ см , $v_0 = 4$ см/с, построить график движения, на промежутке времени от 0 до $t_к = 20$ с, если она движется по горизонтальной прямой под действием:

1) восстанавливающей силы $F = -cx$, принять $c = 32$ Н/см (коэффициент жесткости);

2) восстанавливающей силы F и силы сопротивления $R(t) = bV(t)$, $b = 0{,}5$ – коэффициент сопротивления;

в) восстанавливающей силы F и возмущающей силы $P = H\sin(pt)$, $H = 80$, $p = 1{,}7k$.

Решение задачи

1. Используя второй закон Ньютона, составим дифференциальное уравнение свободных колебаний точки, предварительно определяя: $k = \sqrt{c/m} = \sqrt{32/2} = 4$:

$$x''(t) + 4^2 x(t) = 0.$$

Запускаем программу MathCAD. Вводим исходные данные, вычисляем коэффициенты *k, n, h*.

$$m := 2 \qquad c := 32 \qquad x0 := 4 \qquad v0 := 6 \qquad tk := 20$$

$$b := 0.5 \qquad H := 80 \qquad k := \sqrt{\frac{c}{m}} = 4$$

$$n := \frac{b}{2m} = 0.125 \qquad h := \frac{H}{m} = 40$$

Рис. 3.31. Исходные данные для примера решения

Затем необходимо воспользоваться вычислительным блоком Given – Odesolve. Для этого вводим в программу служебное слово Given, затем дифференциальное уравнение с начальными условиями, при этом знак дифференцирования во второй производной $x''(t)$ вводится с помощью комбинации клавиш (Ctrl + F7); знак логического равенства (**=**) вводится путём нажатия комбинации клавиш (Ctrl + =). Знак логического равенства заменяет обычный знак равенства и в дифференциальном уравнении, и в начальных условиях. Затем решаем данное уравнение с помощью функции Odesolve(t,tk,3000). Здесь первый аргумент определяет переменную, по которой происходит интегрирование, второй – интервал интегрирования по времени, третий (необязательный аргумент) – определяет количество точек аргумента, запрашиваемых для интегрирования.

Для построения графика определяем интервал времени (0, $t_к$) как дискретную переменную с шагом 0.01, создаем график свободных колебаний, выбрав на панели Graph график X-Y Plot. Используя контекстное меню, устанавливаем на графике декартову систему координат, рисуем рамку вокруг графика и вводим название графика (см. Приложение).

Свободные колебания

Given

$$x''(t) + k^2 \cdot x(t) = 0$$

$$x(0) = x0 \qquad x'(0) = v0$$

$$t := 0, 0.01 .. tk$$

$$x := \mathrm{Odesolve}(t, tk, 3000)$$

$$A := \sqrt{x0^2 + \left(\frac{v0}{k}\right)^2} = 4.272$$

$$T := 2\frac{\pi}{k} = 1.571$$

Рис.3. 32. Решение задачи о свободных колебаниях точки

Вычисляем амплитуду и период колебаний.

2. Рассмотрим случай действия на точку восстанавливающей силы F и силы сопротивления среды R. Для этого составляем и решаем дифференциальное уравнение в MathCAD. Затем строим график затухающих колебаний (как в предыдущем случае). Вычисляем период и декремент колебаний (рисунок 3.33).

Свободные колебания при наличии силы сопротивления

Given

$$x''(t) + 2 \cdot n \cdot x'(t) + k^2 \cdot x(t) = 0$$

$$x(0) = x0 \qquad x'(0) = v0$$

$$x := \mathrm{Odesolve}(t, tk, 3000)$$

$$T1 := \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = 1.572$$

$$D := e^{-n \cdot T} = 0.822$$

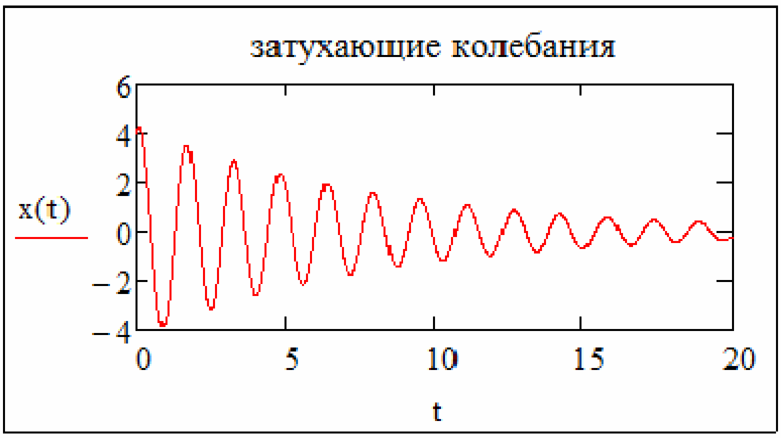

Рис. 3.33. Решение задачи о затухающих колебаниях точки

3. Вынужденные колебания

3.1. Рассмотрим общий случай вынужденных колебаний, когда на точку действуют восстанавливающая сила *F* и возмущающая сила *P*, причем $p \neq k$. Пусть $p = 1{,}7k$, решение дифференциального уравнения и график колебаний точки для такого случая приведён на рисунке 3.34.

вынужденные колебания –общий случай

Given $\quad p := 1.7 \cdot k$

$x''(t) + k^2 \cdot x(t) = h \cdot \sin(p \cdot t)$

$x(0) = x0 \qquad x'(0) = v0$

$x := \text{Odesolve}(t, tk, 3000)$

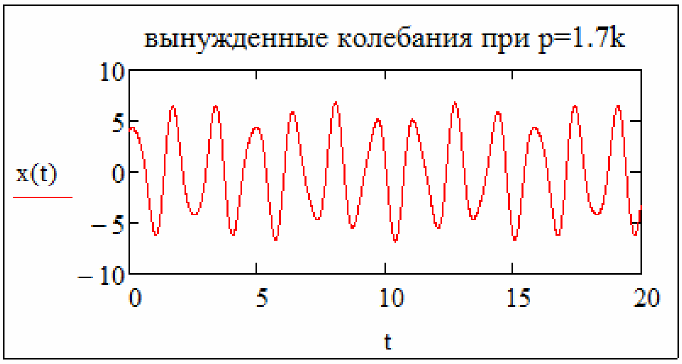

Рис. 3.34. Решение задачи о вынужденных колебаниях точки

3.2. При совпадении частот восстанавливающей и возмущающей сил ($p = k$) вынужденные колебания приводят к возникновению резонанса.

вынужденные колебания – резонанс

Given

$p := k$

$x''(t) + k^2 \cdot x(t) = h \cdot \sin(p \cdot t)$

$x(0) = x0 \quad x'(0) = v0$

$x := \text{Odesolve}(t, tk, 3000)$

$f(t) := \dfrac{h}{2 \cdot k} \cdot t$

$t := 0, 0.01 .. tk$

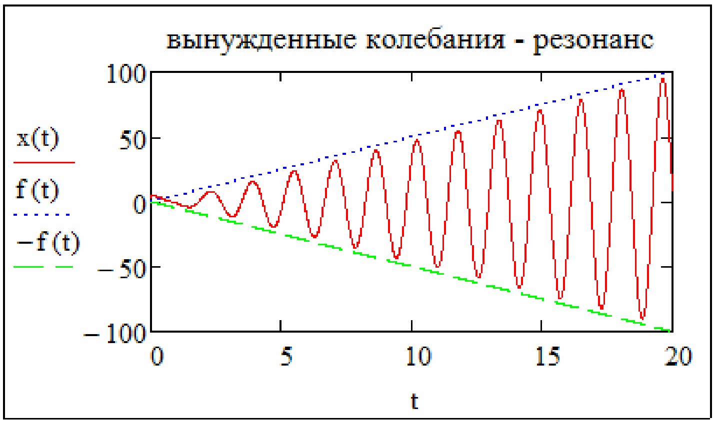

Рис. 3.35. Решение задачи о резонансе

Решение дифференциального уравнения и график движения показан на рисунке 3.35. Скорость возрастания колебаний ограничена функцией $f(t) = \dfrac{h}{2k} t$.

3.3. При значениях частоты возмущающей силы, близкой к частоте восстанавливающей силы ($p \approx k$), вынужденные колебания приводят к возникновению биения. Решение задачи для этого случая показано на рисунке 3.36.

вынужденные колебания - биение

Given $\quad p := 1.15k$

$$x''(t) + k^2 \cdot x(t) = h \cdot \sin(p \cdot t)$$

$x(0) = x0 \qquad x'(0) = v0$

$x := \text{Odesolve}(t, tk, 3000)$

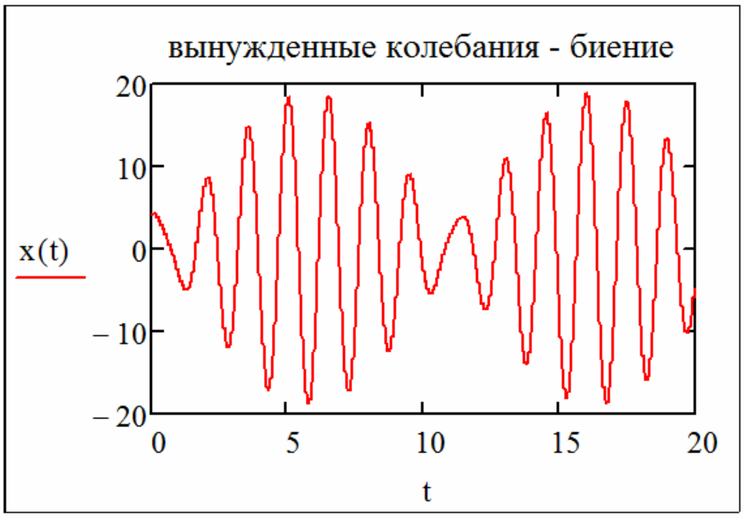

Рис. 36. Решение задачи о биении точки

3.4. Решение задачи о вынужденных колебаниях при резонансе ($p = k$) и наличии силы сопротивления R приведено на рисунке 3.37.

резонанс при наличии сил сопротивления

Given $\quad p := k$

$$x''(t) + 2 \cdot n \cdot x'(t) + k^2 \cdot x(t) = h \cdot \sin(p \cdot t)$$

$x(0) = x0 \qquad x'(0) = v0$

$x := \text{Odesolve}(t, tk, 3000)$

$$A := \frac{h}{2 \cdot k \cdot n} = 40$$

$t := 0, 0.01 .. tk$

Рис. 3.37. Решение задачи о резонансе при наличии сил сопротивления

Максимальная амплитуда таких колебаний определяется по формуле: $A = \dfrac{h}{2kn}$.

Таким образом, полученные решения задачи о колебаниях материальной точке при различных сочетаниях восстанавливающей, возмущающей сил и силы сопротивления показывают влияние этих сил на характер колебаний.

3.4. Лабораторная работа № 12
ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Теоретическая часть

Во многих практических задачах движение материального объекта, принимаемого за материальную точку, удобно рассматривать как результат сложения нескольких (как правило, двух) движений. При этом необходимо выбрать две системы отсчета: неподвижную, связанную с неподвижным наблюдателем и подвижную, перемещающуюся относительно выбранной неподвижной системы. В этом случае движение материальной точки, происходящее относительно подвижной системы отсчета, называется относительным движением, а движение подвижной системы относительно неподвижной – переносным движением. Результирующее движение материальной точки представляется как сумма относительного и переносного движений и называется сложным (абсолютным) движением.

Пусть движение точки рассматривается относительно неподвижной прямоугольной декартовой системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Введем каким-либо образом подвижную систему координат $Oxyz$. Тогда движение точки только относительно системы $Oxyz$ будет относительным движением, а движение самой координатной системы $Oxyz$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ − переносным. Как видно из рис. 3.38, вектор $\overrightarrow{OM}$ представляет относительное движение, вектор $\overrightarrow{O_1O}$ − переносное, а вектор $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$ − сложное движение точки.

Запишем выражение второго закона Ньютона в векторной форме для материальной точки массы m:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k , \qquad (3.16)$$

где $\overline{a}$ – ускорение точки M в неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, $\sum \overline{F}_k$ – главный вектор сил, действующих на точку.