2. ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

2.1. Задача Д1

Груз массой m, получив в точке A начальную скорость V_o, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости. Участки трубы или оба наклонные, или один – горизонтальный, а другой – наклонный (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1). Угол наклона $\alpha = 30°$.

На участке AB на груз, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (её направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости V груза (направлена против движения). Трением груза отрубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0{,}2$) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице (силы F_x, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ даны в таблице в ньютонах; единицу измерения коэффициента μ должен определить и указать решающий задачу).

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задача Д1 – это задача на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить, какую скорость будет иметь груз в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий. При интегрировании дифференциального уравнения движения на участке AB в случае, когда задана его длина, целесообразно перейти к переменной x, учитывая, что

$$\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dV_x^2}{dx}.$$

*Таблица Д*1

Номер условия	m, кг	V_0, м/с	Q	R	μ	l, м	t_1, с	F_x
0	2	20	6	μV	0,4	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	μV^2	0,8	1,5	–	$6t$
2	4,5	18	9	μV	0,5	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	18	μV^2	0,6	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	μV	0,4	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	μV^2	0,5	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	15	5	μV	0,3	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	μV^2	0,8	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	μV	0,5	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	μV^2	0,2	4	–	$-6\sin(4t)$

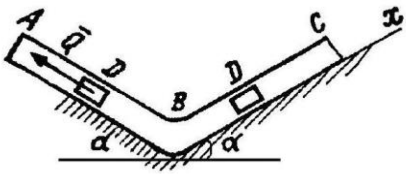

Рис. Д1.0

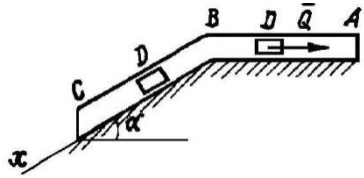

Рис. Д1.1

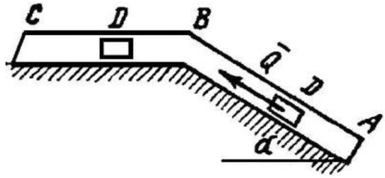

Рис. Д1.2

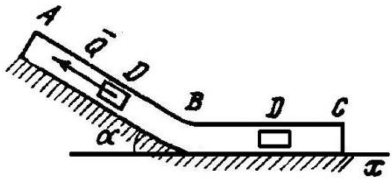

Рис. Д1.3

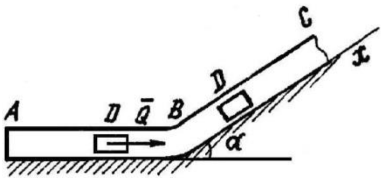

Рис. Д1.4

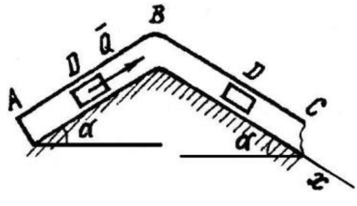

Рис. Д1.5

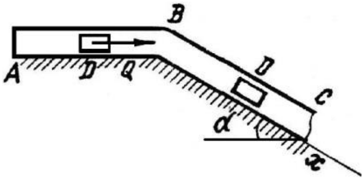

Рис. Д1.6

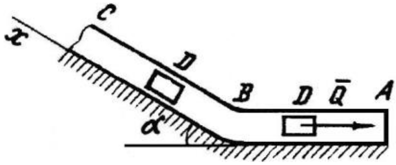

Рис. Д1.7

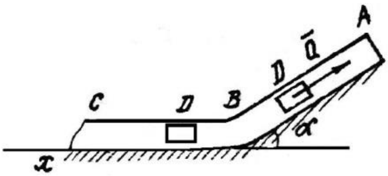

Рис. Д1.8

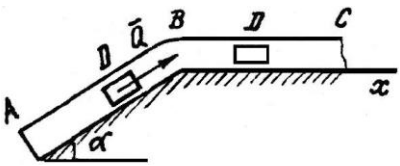

Рис. Д1.9

2.1.1. Основная теория к задаче Д1

Основные законы динамики (законы Галилея – Ньютона)

1. *Закон инерции.* Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не изменят это состояние.

2. *Основной закон.* Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление:

$$m\overline{a} = \Sigma \overline{F}_i .$$

3. *Закон равенства действия и противодействия.* Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. *Закон независимости действия сил.* Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают ей такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка M массой m движется по траектории AB под действием приложенной к ней системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$. Основной закон динамики в векторной форме запишется так:

$$m\bar{a} = \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \cdots + \bar{F}_n,$$

или

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i .$$

Проецируя обе части векторного равенства на декартовы оси координат, получим:

$$ma_x = \sum F_{ix};$$
$$ma_y = \sum F_{iy};$$
$$ma_z = \sum F_{iz}.$$

Учитывая, что $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}$, получим дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых осях координат:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix};$$
$$m\ddot{y} = \sum F_{iy};$$
$$m\ddot{z} = \sum F_{iz}.$$

Две основные задачи динамики точки

При помощи дифференциальных уравнений движения точки можно решать большое количество задач динамики. Всё это многообразие задач разбито на две основные задачи динамики.

Первая основная задача динамики точки (прямая). Зная массу материальной точки *m* и уравнения её движения:

$$x = f_1(t);$$
$$y = f_2(t);$$
$$z = f_3(t),$$

найти модуль и направление равнодействующей всех сил, приложенных к точке.

Эта задача решается следующим путём: дифференцируя дважды по времени уравнения движения, запишем проекции равнодействующей на оси координат:

$$R_x = m\ddot{x};$$
$$R_y = m\ddot{y};$$
$$R_z = m\ddot{z}.$$

Тогда модуль и направление равнодействующей можно найти по известным формулам:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ ;$$

$$\cos\left(\bar{R}\,\hat{,}\,\bar{i}\right) = \frac{R_x}{R},\quad \cos\left(\bar{R}\,\hat{,}\,\bar{j}\right) = \frac{R_y}{R},\quad \cos\left(\bar{R}\,\hat{,}\,\bar{k}\right) = \frac{R_z}{R}.$$

Решение этой задачи обычно не вызывает больших трудностей, и мы не будем на ней останавливается. Более сложной является вторая задача динамики, которая имеет большое практическое значение.

Вторая основная задача динамики точки (обратная). Зная силы, действующие на материальную точку, её массу m, а также начальное положение точки и её начальную скорость, найти уравнения движения точки.

Для решения этой задачи необходимо в левую часть уравнений движения точки подставить значение массы m, а в правую часть – суммы проекций приложенных сил, и полученные дифференциальные уравнения дважды проинтегрировать по времени. При этом силы в правой части могут быть как постоянными, так и переменными величинами, зависящими от времени, скорости или координат движущейся точки.

При интегрировании каждого дифференциального уравнения движения точки появляются две постоянные, а потому при интегрировании трёх дифференциальных уравнений будет шесть постоянных интегрирования. Значения этих постоянных определяют по начальным условиям движения: значениям трёх координат точки и проекций её скорости на три оси в некоторый момент времени, обычно (но не обязательно) в начальный момент, т. е. начальные условия выглядят так:

$$\text{при} \quad t = t_0 \quad x = x_0,\, y = y_0,\, z = z_0,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0,\, \dot{y} = \dot{y}_0,\, \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Эти значения подставляют в уравнения, представляющие собой общие решения дифференциальных уравнений движения точки. Из этих уравнений определяют постоянные интегрирования $C_1, C_2, ..., C_6$ в зависимости от начальных условий. Затем получают уравнения движения точки в виде:

$$x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$
$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$
$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Процесс интегрирования дифференциальных уравнений движения точки разберём на конкретных примерах. При решении задач используем систему единиц СИ.

2.1.2. Пример решения задачи Д1 (1)

На наклонном участке AB трубы на груз D массой m действует сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен f) и переменная сила $F = F(t)$. На вертикальном участке BC

на груз действуют сила тяжести и сила сопротивления R. Движение от точки *A*, где скорость $V_0 = 0$, до точки *B* длится t_1 секунд.

Дано: m = 5 кг; $R = \mu V$; μ = 0,1 кг/с; t_1 = 2 с; f = 0,1; $F_x = 5\sin(2t)$ Н; $\alpha = 30^\circ$.

Определить: $z = z(t)$ – закон движения груза на участке *BC*.

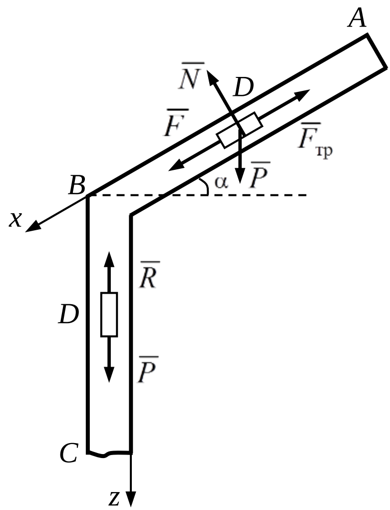

Рис. 1

Решение. 1. Считая груз *D* материальной точкой, рассмотрим движение груза на участке *AB* (рис. 1). Изобразим груз в произвольном положении *D* вместе с приложенными к нему силами: $\overline{P}$ – сила тяжести груза; $\overline{N}$ – реакция трубы; $\overline{F}_{\text{тр}}$ – сила трения; $\overline{F}$ – переменная сила.

Проведём ось *Ax* в направлении движения груза на участке *AB* и составим дифференциальное уравнение движения груза вдоль этой оси:

$$ma_x = \sum F_{ix}\ ;$$

$$m\frac{dV_x}{d\,t} = F_x + P_x + F_{\text{тр}x} + N_x\,, \tag{1.1}$$

где $a_x = \dfrac{dV_x}{d\,t}$ – проекция ускорения точки на ось *Ax*; F_x, P_x, N_x, $F_{\text{тр}x}$ – проекции всех приложенных к точке сил на ту же ось.

Очевидно, $F_x = 5\sin(2t)$.

Далее необходимо в уравнении (1.1) все переменные силы обязательно выразить через величины, от которых они зависят:

$$m\frac{dV_x}{d\,t} = mg\sin\alpha + 5\sin(2t) - mgf\cos\alpha\,,$$

или

$$m\frac{dV_x}{d\,t} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 5\sin(2t). \tag{1.2}$$

Разделив обе части уравнения (1.2) на массу *m*, получим

$$\frac{dV_x}{d\,t} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{5}{m}\sin(2t). \tag{1.3}$$

Вычислим выражение

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 9{,}8\left(\sin 30^\circ - 0{,}1\cos 30^\circ\right) = 4{,}05.$$

Учитывая, что $\dfrac{5}{m} = 1$, подставим полученное в уравнение (1.3):

$$\frac{dV_x}{d\,t} = 4{,}05 + \sin(2t).$$

Получим дифференциальное уравнение с разделяющими переменными. Разделим переменные, получим

$$dV_x = 4{,}05dt + \sin(2t)dt.$$

Интегрируя обе части уравнения, будем иметь

$$V_x = 4{,}05t - \frac{1}{2}\cos(2t) + C_1. \tag{1.4}$$

Произвольную постоянную C_1 найдём из начальных условий: при $t_0 = 0, V_0 = 0$. Следовательно, подставив начальные условия в (1.4), получим

$$-\frac{1}{2}\cos 0 + C_1 = 0, \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

При найденном значении C_1 уравнение (1.4) имеет вид

$$V_x = 4{,}05t - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} \text{ м/с}.$$

Подставляя в полученное выражение для скорости V_x значение $t = t_1 = 2$ с, определим скорость V_B груза в точке *B*:

$$V_B = 4{,}05 \cdot 2 - \frac{1}{2}\cos 4 + 0{,}5 = 8{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}6536 + 0{,}5 = 8{,}927 \text{ м/с}.$$

Примечание. В тех случаях, где угол задан в радианах, необходимо учесть, что $1\text{ рад} = 57{,}3^\circ$, а в нашем случае тогда

$$\cos 4 \approx \cos 229^\circ.$$

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке *BC* (рис. 1). На этом участке найденная скорость V_B будет начальной скоростью. На груз *D* на данном участке действует сила тяжести $P = mg$ и сила сопротивления R. Направим ось *Bz* вниз и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$ma_z = \sum F_{iz},$$

или

$$m\frac{dV_z}{d\,t} = P_z + R_z\,. \qquad (1.5)$$

По условию задачи $P_z = P = mg,\ R_z = -R = -\mu V$. Подставляя значения проекций сил в уравнение (1.5), а также полагая, что $V_z = V$, получим

$$m\frac{dV}{d\,t} = mg - \mu V\,.$$

Деля обе части уравнения на *m*, будем иметь

$$\frac{dV}{d\,t} = g - \frac{\mu}{m}V\,,$$

или

$$\frac{dV}{d\,t} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - V\right). \qquad (1.6)$$

Для сокращения записей введём обозначение и вычислим:

$$k = \frac{mg}{\mu} = 490\ (\text{м/с}).$$

Разделив переменные в уравнении (1.6), получим

$$\frac{dV}{k - V} = \frac{\mu}{m}d\,t\,,$$

или

$$\frac{d(k - V)}{k - V} = -\frac{\mu}{m}dt\,. \qquad (1.7)$$

Интегрируя обе части дифференциального уравнения (1.7), будем иметь

$$\int \frac{d\,(k-V)}{(k-V)} = -\frac{\mu}{m}\int d\,t\,,$$

$$\ln\bigl(k-V\bigr) = -\frac{\mu}{m}t + C_2\,. \qquad (1.8)$$

Постоянную C_2 найдём из начальных условий: при $t_0 = 0, V_0 = V_B$, т. е. $C_2 = \ln\bigl(k - V_B\bigr) = \ln\bigl(490 - 8{,}927\bigr) = 6{,}176$. Тогда уравнение (1.8) перепишется так:

$$\ln\bigl(k-V\bigr) = -\frac{\mu}{m}t + 6{,}176\,. \qquad (1.9)$$

Потенцируя (1.9), будем иметь

$$k - V = e^{-\frac{\mu}{m}t + 6{,}176},$$

или

$$k - V = e^{-0{,}02t + 6{,}176}.$$

Отсюда

$$V = k - e^{-0{,}02t + 6{,}176},$$

или

$$V = 490 - e^{-0{,}02t + 6{,}176} = 481{,}079\,e^{-0{,}02t}\,. \qquad (1.10)$$

Учитывая, что $V = \dfrac{dz}{d\,t}$, получим дифференциальное уравнение движения груза D на участке BC:

$$\frac{dz}{d\,t} = 490 - e^{-0{,}02t + 6{,}176}.$$

Разделив переменные, получим

$$dz = 490 d\,t - e^{-0{,}02t + 6{,}176} \cdot d\,t\,. \qquad (1.11)$$

Интегрируя уравнение (1.11), будем иметь

$$z = 490\,t + \frac{1}{0{,}02} e^{-0{,}02t+6{,}176} + C_3 .$$

Найдём C_3 из начальных условий: при $t_0 = 0,\ z_0 = 0$, следовательно,

$$C_3 = -\frac{1}{0{,}02} e^{6{,}176} = -50 \cdot e^{6{,}176}.$$

Тогда закон движения груза на участке BC будет иметь следующий вид

$$z = 490t + 50 \cdot e^{-0{,}02t+6{,}176} - 50 \cdot e^{6{,}176} \quad \text{м},$$

или

$$z = 490\,t - 50 \cdot e^{6{,}176}\left(1 - e^{-0{,}02t}\right) \text{ м}.$$

2.1.3. Пример решения задачи Д1 (2)

Воспользуемся рисунком и числовыми данными предыдущей задачи, только изменим силы на участках AB и BC. На наклонном участке AB трубы (рис. 2) на груз D массой m действует сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен f) и постоянная сила Q (её направление показано на рис. 2). Расстояние $AB = l$, $V_0 = 0$. На вертикальном участке BC на груз действует сила тяжести и сила сопротивления R.

Дано: m = 5 кг; $R = \mu V$; μ = 0,1 кг/с; $f = 0{,}1$; $\alpha = 30^\circ$;
$Q = 6$ Н; $l = 1{,}5$ м.

Определить: $z = z(t)$ – закон движения груза на участке BC.

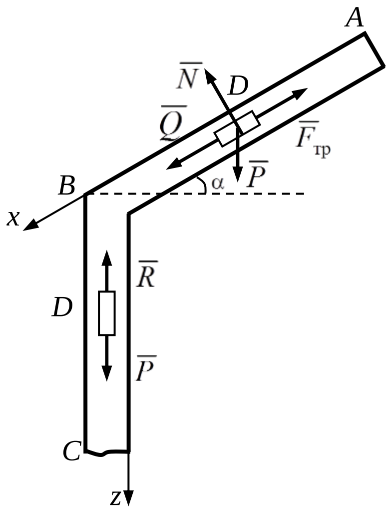

Рис. 2

Решение. Рассмотрим движение груза на участке AB. Изобразим груз в произвольном положении D вместе с приложенными к нему силами: $\overline{P}$ – вес груза; $\overline{N}$ – реакция трубы; $\overline{F}_{тр}$ – сила трения; $\overline{Q}$ – заданная сила.

Проведём ось Ax в направлении движения груза на участке AB и составим дифференциальное уравнение движения груза вдоль оси Ax:

$$ma_x = P_x + Q_x + N_x + F_{трx}, \tag{1.12}$$

где a_x – проекция ускорения на ось Ax; $P_x, Q_x, N_x, F_{трx}$ – проекции всех приложенных сил на ту же ось.

В данном случае, поскольку задана длина участка $AB = l$, воспользуемся второй подстановкой при интегрировании:

$$a_x = V_x \frac{dV_x}{d\,x}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.12) перепишется таким образом:

$$mV_x \frac{dV_x}{d\,x} = Q + P\sin\alpha - F_{\text{тр}}\,,$$

или

$$mV_x \frac{dV_x}{d\,x} = Q + mg\left(\sin\alpha - f\,\cos\alpha\right). \qquad (1.13)$$

Разделив обе части уравнения (1.13) на массу m, получим

$$V_x \frac{dV_x}{d\,x} = g\left(\sin\alpha - f\,\cos\alpha\right) + \frac{Q}{m}\,.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$V_x \frac{dV_x}{d\,x} = 5{,}25\,.$$

Разделим переменные, получим

$$V_x dV_x = 5{,}25\,d\,x\,. \qquad (1.14)$$

Проинтегрируем обе части дифференциального уравнения (1.14), записав определённый интеграл в пределах от нуля до V_B в левой части и от нуля до l в правой части уравнения (1.14):

$$\int_0^{V_B} V_x dV_x = 5{,}25 \int_0^{l} d\,x\,.$$

Результат будет такой:

$$\left.\frac{V_x^2}{2}\right|_0^{V_B} = 5{,}25 \cdot x\,\Big|_0^{l},$$

или

$$\frac{V_B^2}{2} = 5{,}25 \cdot l\,;$$

$$V_B=\sqrt{10{,}5l}=\sqrt{15{,}75}=3{,}97\ \text{м/с}\ .$$

Полученная скорость V_B будет начальной на участке BC. На участке BC на груз D действуют сила тяжести $P=mg$ и сила сопротивления $R=\mu V$ (рис. 2). Проведём ось Bz вниз и составим дифференциальное уравнение движения груза на этом участке:

$$ma_z=\sum F_{iz}\ ,$$

или

$$m\frac{dV_z}{d\,t}=P-R\ .$$

Подставляя силы P и R, будем иметь

$$m\frac{dV_z}{d\,t}=mg-\mu V_z\ . \qquad (1.15)$$

Преобразуем (1.15), деля на массу m:

$$\frac{dV_z}{d\,t}=g-\frac{\mu}{m}V_z\,,$$

или

$$\frac{dV_z}{d\,t}=\frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu}-V_z\right). \qquad (1.16)$$

Для сокращения записи обозначим и вычислим:

$$k=\frac{mg}{\mu}=490\ \text{м/с}\ .$$

Уравнение (1.16) перепишется так:

$$\frac{dV_z}{k-V_z}=\frac{\mu}{m}d\,t\ . \qquad (1.17)$$

Проинтегрируем уравнение (1.17), записав определённый интеграл в пределах от V_B до переменного V_z слева и от нуля до t – справа:

$$\int_{V_B}^{V_z} \frac{dV_z}{k - V_z} = \frac{\mu}{m} \int_0^t dt .$$

Получим

$$\ln\left(k - V_z\right)\Big|_{V_B}^{V_z} = -\frac{\mu}{m} t \Big|_0^t ,$$

или после подстановки пределов интегрирования:

$$\ln\left(\frac{k - V_z}{k - V_B}\right) = -\frac{\mu}{m} t . \qquad (1.18)$$

Пропотенцировав выражение (1.18), получим

$$\frac{k - V_z}{k - V_B} = e^{-\frac{\mu}{m} t} ,$$

откуда

$$V_z = 490 - 486{,}03 \cdot e^{-0{,}02t} .$$

Учитывая, что $V_z = \dfrac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{dz}{dt} = 490 - 486{,}03 \cdot e^{-0{,}02t} . \qquad (1.19)$$

В уравнении (1.19) разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_0^z dz = 490 \int_0^t dt - 486{,}03 \int_0^t e^{-0{,}02t} \cdot dt .$$

После интегрирования и подстановки пределов интегрирования получим закон движения груза D на участке BC:

$$z = 490t - 24301 \cdot \left(1 - e^{-0{,}02t}\right) \text{ м.}$$