

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Томский политехнический университет»

---

УТВЕРЖДАЮ

Декан АВТФ

\_\_\_\_\_ С. А. Гайворонский

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2009 г.

**Теория автоматического управления**

Методические указания по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине «Теория автоматического управления»  
для студентов направления 550200 – Автоматизация и управление

Томск 2009

УДК 681.5

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория автоматического управления» для студентов направления 550200 – Автоматизация и управление / Сост. С.В. Замятин, Плотников Д.А., 2009 - 18 с.

# 1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ 1-ГО ПОРЯДКА»

Целью лабораторной работы является исследование свойств динамических звеньев 1-го порядка:

- построение их переходных характеристик;
- оценка устойчивости звеньев по переходным характеристикам
- оценка устойчивости звеньев по полюсам их передаточных функций.

## 1.1 Теоретическая часть

Определим значения некоторых необходимых терминов.

**Порядок звена** – величина, определяемая наибольшей степенью при операторе Лапласа  $s$  в знаменателе передаточной функции (ПФ).

К динамическим звеньям первого порядка относятся:

- Интегрирующее звено (ПФ:  $W_i(s) = 1/s$ ).
- Аperiodическое звено (ПФ:  $W_{ap}(s) = 1/(Ts + 1)$ ).
- Реальное дифференцирующее звено (ПФ:  $W_{rd}(s) = Ks/(Ts + 1)$ ).
- Интегро-дифференцирующее звено (ПФ:

$$W_{id}(s) = K(T_1s + 1)/(T_2s + 1).$$

**Единичное ступенчатое воздействие** – воздействие на систему (сигнал) определяемый выражением  $y = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$ .

**Переходная характеристика** – реакция звена (системы) на единичное ступенчатое воздействие.

**Устойчивость звена (системы)** – свойство звена (системы), позволяющее удерживать постоянной выходную величину при неизменном входном воздействии.

**Полюсы и нули ПФ** – корни числителя и знаменателя ПФ.

Формула Хэвисайда.

Для получения зависимости выходной величины звена от входной можно использовать формулу Хэвисайда

$$U_{out}(t) = U_{in}(t) \left( \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{s_i B'(s_i)} e^{s_i t} \right), \quad (1.1)$$

где  $A(s), B(s)$  – числитель и знаменатель ПФ звена,  $s_i$  –  $i$ -й корень характеристического уравнения (ХУ) ПФ.

Рассмотрим элементарные звенья более подробно.

### 1. Интегрирующее звено.

Описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dU_{out}(t)}{dt} = U_{in}(t).$$

ПФ звена:

$$W_i(s) = 1/s.$$

Решение уравнения при нулевых начальных условиях:

$$U_{out}(t) = U_{in}(t) \cdot t.$$

### 2. Аperiodическое звено.

Описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dU_{out}(t)}{dt} + U_{out}(t) = U_{in}(t).$$

ПФ звена:

$$W_a(s) = \frac{1}{Ts + 1}.$$

Решение уравнения при нулевых начальных условиях:

$$U_{out}(t) = U_{in}(t) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (1.2)$$

### 3. Реальное дифференцирующее звено.

Описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dU_{out}(t)}{dt} + U_{out}(t) = T \frac{dU_{in}(t)}{dt}.$$

ПФ звена:

$$W_a(s) = \frac{Ts}{Ts + 1}.$$

Решение уравнения при нулевых начальных условиях:

$$U_{out}(t) = U_{in}(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

**Программа работы:**

1. Получить передаточную функцию системы изображенной на рис. 1.1.

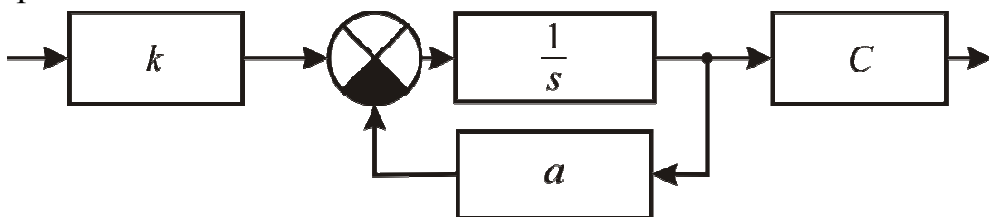


Рис. 1.1. Структурная схема

2. Установить значения коэффициентов  $c > 0, k > 0, T > 0$ .
3. Используя пакет MathCAD построить переходные характеристики данной системы используя выражение (1.2) и используя формулу Хэвисайда.
4. Получить переходные характеристики звена при  $a = 1$ , и  $a = -1$ . Оценить устойчивость полученных систем.
5. Построить корни на комплексной плоскости для полученных ХУ.
6. Построить систему изображенной на рис. 1.1 в пакете Simulink Matlab.  
(Для построения схемы выберите необходимые блоки из вкладок библиотеки Simulink:  
*Continuous->Transfer Fcn,*  
*Sinks->Scope,*  
*Sources->Step,*  
*Math Operations ->Sum*)
7. Используя пакет Matlab, получить графики переходных процессов при  $a = 1$ , и  $a = -1$ . Сравнить с результатами, полученными в MathCAD.

## 2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ 2-ГО ПОРЯДКА»

**Цель лабораторной работы:** исследование свойств динамических звеньев 2-го порядка:

- построение их переходных характеристик;
- оценка устойчивости звеньев по переходным характеристикам
- оценка устойчивости звеньев по полюсам их передаточных функций.

### 2.1 Теоретическая часть

К динамическим звеньям второго порядка относятся:

- Апероидическое звено второго порядка.
- Колебательное звено.
- Консервативное звено.

ПФ звеньев имеют вид:

$$W_{ap}(s) = k / ((T_2s + 1)(T_1s + 1)) = \frac{k}{d_2s^2 + d_1s + d_0}.$$

В зависимости от расположения корней ХУ ПФ звено может быть:

- 1) апероидическим, колебательным или консервативным;
- 2) устойчивым или неустойчивым.

*Для устойчивости звена необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех его полюсов были меньше нуля.*

Если мнимые части корней равны нулю – звено **апероидическое**, если не равны нулю – **колебательное**.

В случае если корни комплексные и лежат на мнимой оси – звено **консервативное**.

#### **Программа работы:**

1. Для системы, изображенной на рис. 2.1 получить передаточную функцию.

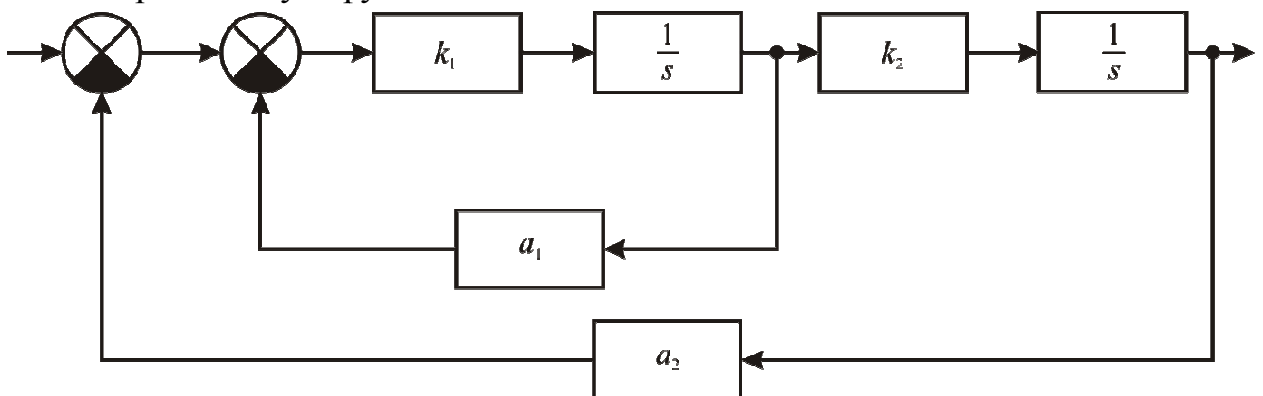


Рис. 2.1. Структурная схема

2. Исходя из условия устойчивости звеньев и принадлежности к тому или иному типу, определить значения коэффициентов  $d_i$ , при которых получаются следующие звенья:

- Колебательное устойчивое;
- Аperiodическое устойчивое;
- Колебательное неустойчивое;
- Аperiodическое неустойчивое;
- Консервативное.

Для полученных звеньев, используя пакеты MathCAD и Matlab, построить переходные характеристики и корни на комплексной плоскости. Сравнить результаты.

### 3 ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

**Цель:** исследование частотных характеристик типовых динамических звеньев.

#### 3.1 Теоретическая часть

В теории управления частотные методы анализа и синтеза САУ основаны на исследовании реакции системы на гармоническое входное воздействие:

$$U_{in}(t) = U_{Ain} \sin(\omega t), \quad (3.1)$$

где  $U_{Ain}$  – амплитуда входного сигнала,  $\omega$  – угловая частота.

После окончания переходного процесса, вызванного  $U_{in}(t)$ , на выходе системы будут существовать колебания той же частоты  $\omega$ , но имеющие другую амплитуду  $U_{Aout}$  и фазовый сдвиг  $\varphi$ .

$$U_{out}(t) = U_{Aout} \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.2)$$

Амплитудно-фазо-частотную характеристику (**АФЧХ**) можно получить из ПФ  $W(s)$  системы путем подстановки  $s \rightarrow j\omega$ :

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.3)$$

где  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$  – вещественная и мнимая часть  $W(j\omega)$ ;

Пример АФЧХ приведен на рис. 3.1.

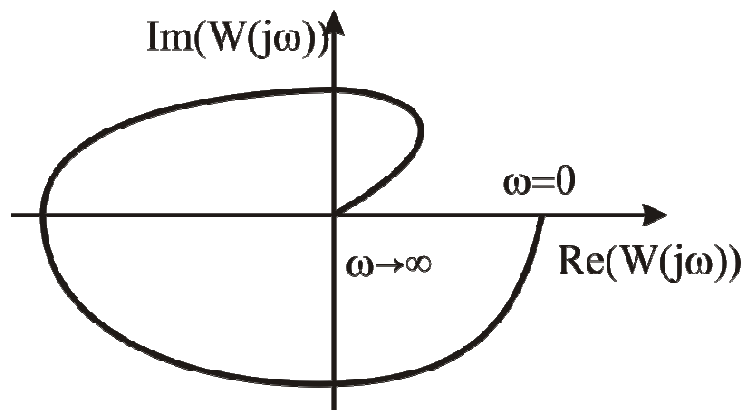


Рис. 3.1. АФЧХ

$H(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика (**АЧХ**).



$\varphi(\omega)$  – фазо-частотная характеристика (**ФЧХ**).

$$H(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(j\omega) + Q^2(j\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \arg |W(j\omega)| = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Также используют логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) и логарифмическую фазо-частотную характеристику (ЛФЧХ).

Значения ЛАЧХ определяется по формуле  $L(\omega) = 20 \lg H(\omega)$  и строится на графике в зависимости от логарифма частоты  $\lg(\omega)$ .

***Программа работы:***

1. Задайте ПФ:
  - устойчивого апериодического звена;
  - устойчивого колебательного звена.
2. Для данных звеньев в пакете MathCad постройте: АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФЧХ.  
В пакете Matlab постройте диаграммы Боде.  
Сравните результаты.

## 4 ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ САУ

**Цель работы:** исследование точности регулирования САУ и методов ее повышения.

### 4.1 Теоретическая часть

Ошибка регулирования определяется по формуле

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t), \quad (4.1)$$

где  $g(t)$  – задающее воздействие,  $x(t)$  – выходной сигнал системы.

Различают ошибки в стационарном (установившемся) ( $s = 0$ ) и динамическом режиме.

**Установившаяся ошибка** определяется следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t).$$

Если на систему действуют два внешних воздействия — задающее воздействия  $g(t)$  и возмущение  $f(t)$ , то установившуюся ошибку можно представить в виде суммы:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t)$$

где  $\varepsilon_g(t)$ ,  $\varepsilon_f(t)$  — установившиеся ошибки от задающего воздействия  $g(t)$  и возмущения  $f(t)$  соответственно.

Числовыми показателями качества в установившемся режиме являются коэффициенты ошибок.

Установившуюся ошибку  $\varepsilon_g(t)$  можно представить в виде ряда

$$\varepsilon_g(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt} + C_{g2}\frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots, \quad (4.2)$$

где  $C_{g0} = W_{ge}(s)$ ,  $C_{gi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{ge}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Здесь  $W_{ge}(s)$  — передаточная функция относительно входа  $g(t)$  и выхода  $\varepsilon(t)$ . Коэффициенты  $C_{gk}$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) называются коэффициентами

ошибки по задающему воздействию. Аналогично можно представить ошибку  $\varepsilon_f(t)$ .

Из выражения (4.2) следует, что для устранения статической ошибки, ошибок по скорости и ускорению необходимо равенство нулю, соответственно, коэффициентов  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $\frac{c_2}{2!}$ . Для этого необходимо обеспечить системе соответствующий порядок астатизма.

Под *порядком астатизма* понимается степень  $\nu$  изображения  $S^\nu$ , находящегося в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы. Например, для  $W_{PC}(s) = \frac{B(s)}{s^2 \cdot A(s)}$  порядок астатизма равен 2.

Для астатических систем 1-го порядка коэффициент  $c_0$  равен нулю, для систем с астатизмом 2 порядка –  $c_0$ ,  $c_1$  равны нулю, для систем с астатизмом 3-го порядка –  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $\frac{c_2}{2!}$  равны нулю. Таким образом, астатические системы 1-го порядка воспроизводят без ошибки постоянные задающие воздействия  $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ , системы с астатизмом 2-го порядка воспроизводят без ошибки задающее воздействие, меняющееся с постоянной скоростью  $g(t) = v_0 \cdot t$ ,  $v_0 = const$  и т.д.

**Программа работы:**

1. Задать передаточную функцию устойчивого объекта  $W_{oy}(s)$  (рис. 4.1)

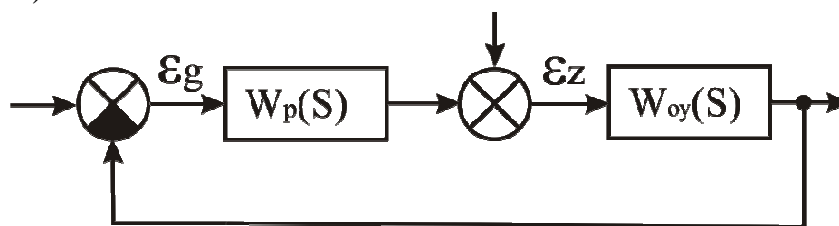


Рис. 4.1. Структурная схема системы

Найти статическую ошибку и коэффициент передачи замкнутой системы:

- по графику переходной характеристики,
- по передаточной функции системы.

2. Найти полную ошибку по задающему воздействию, если входное воздействие будет иметь вид:  $g(t) = at + b$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  задать самостоятельно.

3. Выбрать в качестве регулятора пропорциональное звено. Изменяя значение коэффициента регулятора сделать выводы об изменении статической ошибки и ошибки по скорости.

4. Выбрать в качестве регулятора интегрирующее звено. Изменяя значение коэффициента регулятора сделать выводы об изменении статической ошибки и ошибки по скорости.

## 5 СИНТЕЗ САУ

С точки зрения ТАУ целью синтеза является формирование закона управления, при котором достигаются заданные показатели устойчивости и качества системы. Формирование закона управления осуществляется с помощью регулятора.

Существует достаточно много способов синтеза регуляторов, рассмотрим некоторые из них:

- метод D-разбиения;
- метод Циглера-Никольса;
- метод корневого годографа.

### Метод D-разбиения

Суть метода. Изменяя параметры системы в определенной последовательности, можно выбрать те комбинации параметров, когда корни характеристического уравнения системы являются нулевыми (расположены на оси ординат). На рис. 5.1 точки 1,2,3... $m$  являются той комбинацией параметров  $M$  и  $N$ , когда хотя бы одна пара из корней характеристического уравнения системы является мнимой. Соединив точки, получаем кривую, которая называется – кривая D-разбиения.

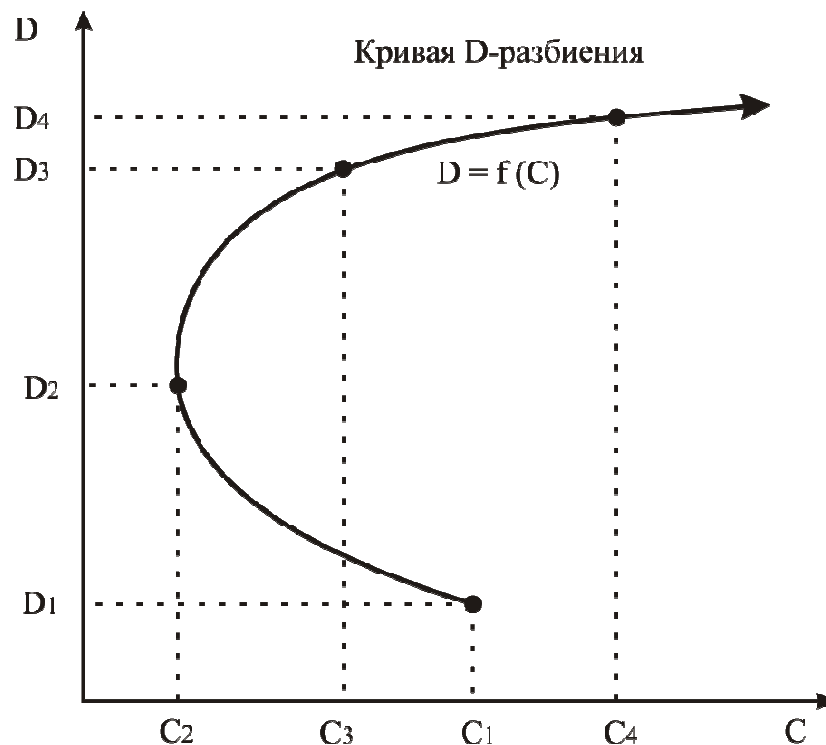


Рис. 5.1. Кривая D – разбиения в плоскости параметров C и D

Кривая  $D$ -разбиения разбивает плоскость параметров  $M$  и  $N$  на области с различным содержанием левых и правых корней. Та область, где все корни характеристического уравнения системы являются левыми, претендует на область устойчивости. Для выявления области устойчивости используется штриховка кривой  $D$ -разбиения. Исходным уравнением для построения области устойчивости является характеристическое уравнение замкнутой системы, которое содержит варьируемые параметры  $M$  и  $N$ .

Рассмотрим алгоритм построения области устойчивости в плоскости одного параметра системы  $N$ .

1. В характеристическом уравнении замкнутой системы выявляется варьируемый параметр  $N$ .
2. Выражается данное уравнение относительно варьируемого параметра  $N$ .
3. Переходя в частотный диапазон, заменяя  $S \rightarrow j\omega$ , выделяя вещественную и мнимую составляющие, получаем уравнение кривой  $D$ -разбиения  $N(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + \text{Im}(j\omega)$ .
4. Задавая частоту  $\omega \in (0, \infty)$ , строим одну ветвь кривой  $D$ -разбиения и при  $\omega \in (-\infty, 0)$  – другую ветвь.
5. Нанося штриховку на ветви кривой  $D$ -разбиения, выделяем область устойчивости.
6. Из области устойчивости выбираем пределы варьирования параметра  $N$ .
7. Для выбранного значения  $N$ , и, используя любой критерий устойчивости, выполняем проверку найденной области.

### Метод настройки Циглера-Никольса

В практике настройки замкнутых систем управления нередко встречается задача обеспечения приемлемого динамического качества замкнутой системы с помощью регуляторов, обеспечивающих типовые линейные алгоритмы управления (П-, ПИ- или ПИД-) устойчивыми объектами, параметры которых точно измерить не удастся. В этом случае результат можно получить, используя метод замкнутого контура Циглера-Никольса. Метод состоит в следующем:

- а) к выходу регулятора или объекта подключается самопишущий потенциометр, а интегральное и дифференциальное воздействия регулятора - блокируются (исключаются).

б) затем коэффициент пропорциональности регулятора  $K_{\Pi}$  постепенно увеличивают, пока при некотором значении этого коэффициента  $K_{\Pi \text{ пред}}$  в системе не установятся устойчивые колебания с периодом  $T_{\text{пред}}$ . (рис. 5.2)

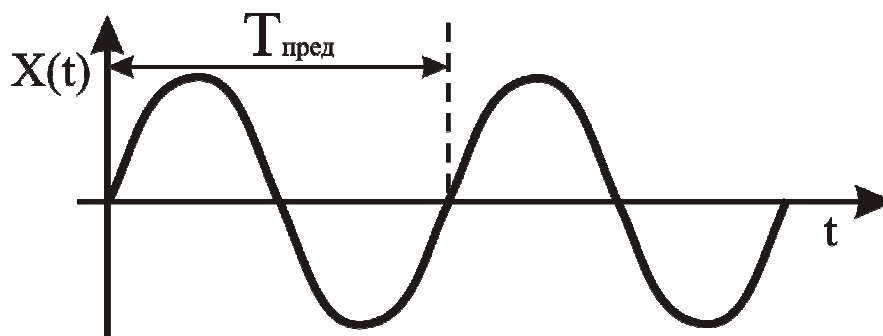


Рис. 5.2. Устойчивые колебания

в) далее рассчитываются и устанавливаются параметры регулятора на основе следующих соотношений:

Для П-регулятора  $K_{\Pi} = 0,5K_{\text{Пред}}$ .

Для ПИ-регулятора  $K_{\Pi} = 0,45K_{\text{Пред}}$ ,  $T_{\text{И}} = 0,5T_{\text{Пред}}$ .

Для ПИД-регулятора  $K_{\Pi} = 0,6K_{\text{Пред}}$ ,  $T_{\text{И}} = 0,5T_{\text{Пред}}$ ,  $T_{\text{Д}} = 0,125T_{\text{Пред}}$ .

### Метод корневого годографа

**Корневой годограф** – траектория, описываемая на комплексной плоскости полюсами передаточной функции динамической системы при изменении одного из её параметров. Обычно изменяемым параметром является коэффициент усиления системы.

Суть метода заключается в размещении требуемым образом полюсов и нулей замкнутой системы.

Для применения данного метода предлагается использовать приложение *sisotool* пакета Matlab.

#### Программа работы:

1. Задать передаточную функцию устойчивого объекта второго порядка.
2. Найти такие передаточные функции П-, ПИ-, ПИД-регуляторов, каждым из предложенных методов, чтобы замкнутая система была устойчива. Сравнить результаты.

## 6 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### Использование метода Гольдфарба для оценки устойчивости нелинейной САУ

Анализ устойчивости гармонически линеаризованной нелинейной САУ проводится в два этапа. На первом этапе принимают гипотезу, что в системе существуют автоколебания и определяют амплитуду  $a_n$  и частоту этих колебаний  $\omega_n$ , а затем, на втором этапе оценивается устойчивость найденного периодического решения и устойчивость нелинейной САУ. Для этих целей можно использовать либо критерий Михайлова, либо метод Гольдфарба.

Рассмотрим метод Гольдфарба. Основное уравнение метода гармонического баланса (линеаризации) имеет вид

$$1 + W_H(a) \cdot W_L(j\omega) = 0, \quad (5.1)$$

где  $W_L(j\omega)$  – передаточная функция линейной части нелинейной САУ;  $W_H(a)$  – комплексный коэффициент передачи гармонически линеаризованного нелинейного элемента.

Нелинейная часть описывается выражением:

$$W_H(a) = q(a) + j \cdot q'(a); \quad (5.2)$$

$$W_H(a) = q(a). \quad (5.3)$$

Решая уравнение (5.1) относительно  $\omega$  и  $a$ , можно определить параметры автоколебаний. Гольдфарб Л.С. предложил решать его графическим способом, представив это уравнение как

$$W_L(j \cdot \omega) = -G_H(a), \quad (5.4)$$

где  $G_H(a) = 1/W_H(a)$  – обратная характеристика НЭ.

На комплексной плоскости строится годограф линейной части  $W_L(j\omega)$  и отрицательная характеристика НЭ  $-G_H(a)$ . Точки пересечения этих характеристик и дают решения уравнения (5.4). По характеристике  $-G_H(a)$  определяется амплитуда колебаний  $a_n$ , а по годографу  $W_L(j\omega)$  – частоту  $\omega_n$ .



На рис. 6.1 показан случай наличия в системе 2-х периодических решений: точки пересечения графиков 2 ( $a_{n1}, \omega_{n1}$ ) и 5 ( $a_{n2}, \omega_{n2}$ ). Для положительных приращений амплитуды  $a_n + \Delta a$ , годограф  $W_{лч}(j\omega)$  охватывает т.4 и не охватывает т.1, а для отрицательных  $a_n - \Delta a$  – охватывает т.3 и не охватывает т.6.

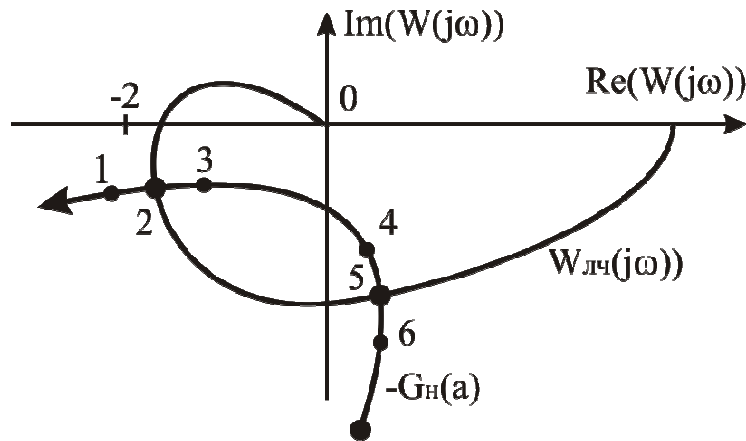


Рис. 6.1. Графическое представление метода Гольдфарба

Если годограф  $W_{лч}(j\omega)$  не охватывает точку с положительным приращением амплитуды  $a_n + \Delta a$  (см. т.1), и охватывает точку с  $a_n - \Delta a$ , то найденное решение будет устойчивым (т.2) и система устойчива в большом. В противном случае (т.5) найденное решение является неустойчивым, а система устойчива в малом.

**Программа работы:**

Система, представленная на рис. 6.2:

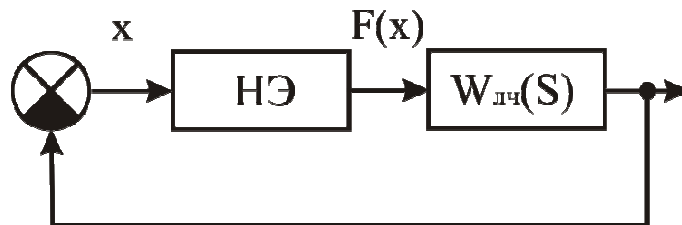


Рис. 6.2 Структурная схема нелинейной системы

имеет нелинейность вида (рис. 6.3):

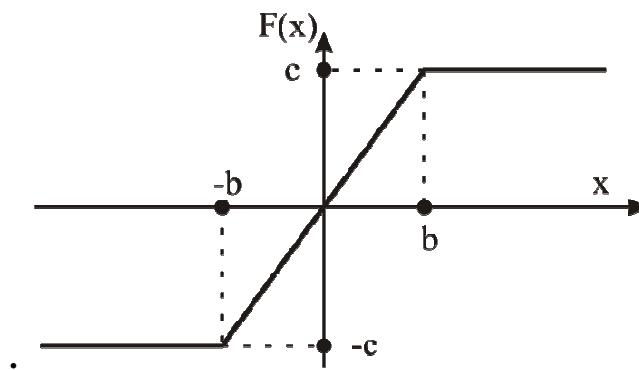


Рис. 6.3. Нелинейность типа «насыщение»

Для системы определены значения звеньев:

$$W_{\Pi}(s) = \frac{6,12}{0,0007s^4 + 0,043s^3 + 0,41s^2 + 1,3s + 1}.$$

$$G_H(a) = 1/W_H(a) = 0,196 \cdot \frac{1}{\left( \arcsin \frac{2}{a} + \frac{2}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{2^2}{a^2}} \right)}.$$

**Необходимо определить устойчивость системы по методу Гольдфарба.**