ЛЕКЦИЯ 7

Параллельный колебательный контур

Параллельный колебательный контур – это параллельное соединение конденсатора C и катушки индуктивности L, подключенное к источнику возбуждения $U_{\text{вх}}$. С учетом относительно малых активных сопротивлений R_L и R_C, отражающих потери в реальных компонентах цепи, ***полная*** схема параллельного КК имеет вид, показанный на рис. 7.1:

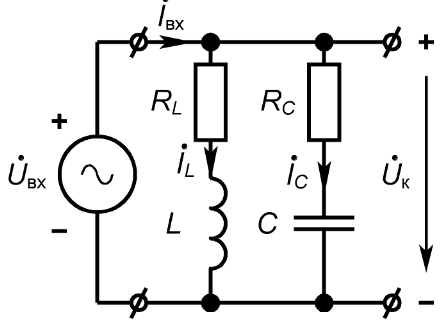
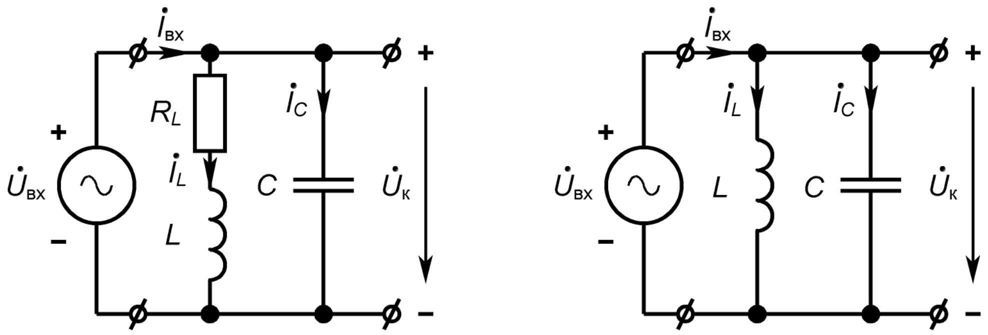


Рис. 7.1. Полная схема параллельного колебательного контура с учетом потерь в реактивных элементах

Анализ полной схемы позволяет получить ***общие*** результаты, учитывающие потери в реальных компонентах контура, всегда имеющие место в реальной электрической цепи. Однако сложность и трудоемкость анализа при этом существенно возрастают. Учитывая, что потери в катушке индуктивности и в конденсаторе относительно невелики (особенно в конденсаторе, так как на практике всегда выполняется неравенство $R_L >> R_C$), зачастую для анализа параллельного КК используют упрощенные схемы, пренебрегая потерями либо только в конденсаторе (рис. 7.2, а), либо одновременно и в конденсаторе, и в дросселе (рис.7.2, б). Последняя схема изображает ***идеальный*** параллельный КК без потерь.



а) б)

Рис. 7.2. Упрощенные схемы параллельного КК: а) без учета потерь в конденсаторе; б) без учета потерь в реактивных элементах контура ***(идеальный параллельный колебательный контур)***

Очевидно, ***что при любой частоте входного сигнала*** напряжение на контуре равно входному напряжению, т.е. ***всегда*** выполняется равенство: $u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{к}}(t)$. Отсюда следует важный вывод: ***при возбуждении параллельного колебательного контура от источника напряжения цепь относительно контурного напряжения $u_к(t)$ не является частотно-избирательной.*** Таким образом, **резонанса напряжений, наблюдающегося в последовательном КК на резонансной частоте ω_0, в параллельном колебательном контуре не происходит.**

Рассмотрим подробнее, какие явления наблюдаются в параллельном КК, если частоту входного сигнала изменять в диапазоне $0 \le \omega \le \infty$.

Пусть на контур поступает гармоническое напряжение с нулевой начальной фазой, т.е. $u_{\text{вх}}(t) = U_{m\text{вх}} \sin \omega t$. Согласно первому закону Кирхгофа для действующих значений токов контура в комплексном виде справедливо:

$$\dot{I}_{\text{вх}} = \dot{I}_L + \dot{I}_C\,, \tag{7.1}$$

где токи в ветвях с катушкой индуктивности L и конденсатором C, соответственно, составляют:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\underline{Z}_L} = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{R_L + j\omega L}, \tag{7.2}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\underline{Z}_C} = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{R_C - j/\omega C}. \tag{7.3}$$

Поскольку потери в реальных реактивных компонентах контура относительно малы, в широкой полосе частот (за исключением небольших областей частот вблизи предельных значений) выполняется неравенства: $\omega L >> R_L, 1/\omega C >> R_C$. Следовательно, для модулей и аргументов комплексов рассматриваемых токов справедливо:

$$I_L = \frac{U_{\text{вх}}}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}} \approx \frac{U_{\text{вх}}}{\omega L}, \qquad \varphi_{IL} = \varphi_{U\text{вх}} - \varphi_{ZL} = 0 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_L}\right) \to -\frac{\pi}{2}, \tag{7.4}$$

$$I_C = \frac{U_{\text{вх}}}{\sqrt{R_C^2 + 1/\omega^2 C^2}} \approx U_{\text{вх}} \cdot \omega C\,,$$

$$\varphi_{IC} = \varphi_{U\text{вх}} - \varphi_{ZC} = 0 - (-)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega C R_C}\right) \to \frac{\pi}{2}, \tag{7.5}$$

т.е. ток индуктивности I_L отстает от $U_{\text{вх}}$, а ток конденсатора I_C опережает входной сигнал ***почти*** на $\pi/2$.

Построим векторные диаграммы цепи для трех случаев: 1) относительно низкая частота входного сигнала; 2) относительно высокая частота; 3) частота, близкая к резонансной ω_0, на которой модули сопротивлений реактивных элементов равны между собой.

Поскольку цепь представляет собой параллельное соединение двух ветвей, в качестве базового целесообразно использовать вектор, отражающий входной сигнал $\dot{U}_{\text{вх}}$. С учетом нулевой начальной фазы напряжения $u_{\text{вх}}(t)$ направление вектора $\dot{U}_{\text{вх}}$ будет совпадать с положительным направлением действительной оси $\mathrm{Re}(\dot{C})$ прямоугольной системы координат комплексной плоскости $\dot{C}$, на которой будет строиться векторная диаграмма.

1. **Относительно низкие частоты:** $X_L = \omega L << X_C = 1/\omega C$.

Очевидно, что в этом случае $I_L \approx U_{\text{вх}} / \omega L >> I_C \approx U_{\text{вх}}\omega C$. Векторная диаграмма для этого случая показана на рис. 7.3.

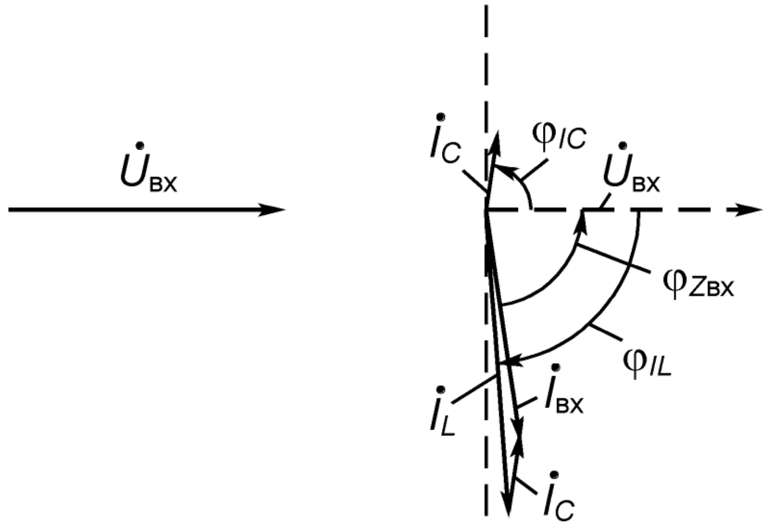


Рис. 7.3. Векторная диаграмма для параллельного колебательного контура на относительно низкой частоте $\omega << \omega_0$

Поскольку частота входного воздействия относительно низка, модуль сопротивления конденсатора $X_C = 1/\omega C$ существенно больше модуля сопротивления катушки индуктивности $X_L = \omega L$, поэтому ток I_C ветви с конденсатором намного меньше тока I_L ветви с катушкой, что и отражено на векторной диаграмме. Так как сопротивления потерь R_L и R_C в элементах контура относительно малы, аргументы комплексов $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_C$ ($\varphi_{IL} < 0$ и $\varphi_{IC} > 0$, соответственно), отражающие начальные фазы токов i_L и i_C, примерно равны по модулю $\pi/2$, причем ток $\dot{I}_L$ отстает от $\dot{U}_{\text{вх}}$, а $\dot{I}_C$

опережает его почти на $\pi/2$. Построив вектора $\dot{I}_L$ и $\dot{I}_C$ из условного начала координат комплексной плоскости, складываем их по правилу сложения векторов. Результирующий вектор согласно уравнению (7.1) является вектором входного тока $\dot{I}_{\text{вх}}$. Этот ток имеет отрицательную начальную фазу (аргумент) $\varphi_{I\text{вх}}$, поскольку повернут относительно вектора $\dot{U}_{\text{вх}}$ на некоторый угол по часовой стрелке. Проводя стрелку от вектора $\dot{I}_{\text{вх}}$ к вектору $\dot{U}_{\text{вх}}$, убеждаемся, что угол $\varphi_{Z\text{вх}} > 0$, что свидетельствует об активно-индуктивной реакции цепи (во входном токе превалирует индуктивная составляющая I_L). Так как $\varphi_{U\text{вх}} = 0$, $\varphi_{Z\text{вх}} = (-)\ \varphi_{I\text{вх}}$.

2. Относительно высокие частоты: $X_L = \omega L \gg X_C = 1/\omega C$**.**

Очевидно, что в этом случае $I_L \approx U_{\text{вх}}/\omega L << I_C \approx U_{\text{вх}}\omega C$, т.е. ток в ветви с конденсатором существенно превышает по модулю ток в ветви с катушкой индуктивности. Векторная диаграмма цепи, построенная для этого случая, приведена на рис. 7.4.

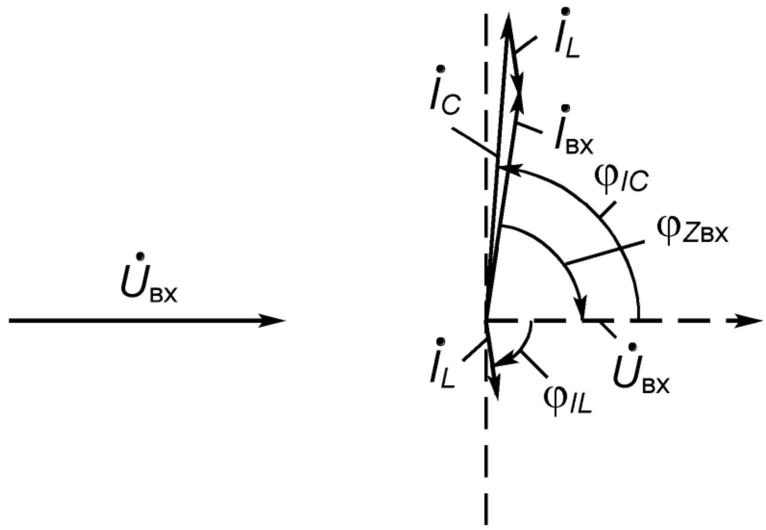


Рис. 7.4. Векторная диаграмма для параллельного колебательного контура на относительно высокой частоте $\omega >> \omega_0$

В отличие от предыдущего случая, здесь вектор $\dot{I}_{\text{вх}}$ расположился в I квадранте. Это свидетельствует о положительной начальной фазе входного тока ($\varphi_{I\text{вх}} > 0$), что обусловлено превалированием в его составе емкостной составляющей $\dot{I}_C$. Угол $\varphi_{Z\text{вх}} < 0$, т.е. реакция цепи, как и должно быть в этом случае, является активно-емкостной. Как и ранее, выполняется равенство: $\varphi_{Z\text{вх}} = (-)\ \varphi_{I\text{вх}}$.

3. Частота, близкая к резонансной: $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$**,** т.е. модули сопротивлений конденсатора и катушки индуктивности равны между собой

($X_L(\omega_r) = X_C(\omega_r)$) и равны характеристическому сопротивлению контура – $\omega_r L = 1/\omega_r C = \rho$.

В этом случае токи $I_L \approx U_{\text{вх}}/\omega_r L = U_{\text{вх}}/\rho$ и $I_C \approx U_{\text{вх}} \cdot \omega_r C = U_{\text{вх}}/\rho$ практически равны по величине, и сдвиг фаз между ними близок к 180°= π. Векторная диаграмма, отражающая рассматриваемый случай, показана на рис. 7.5.

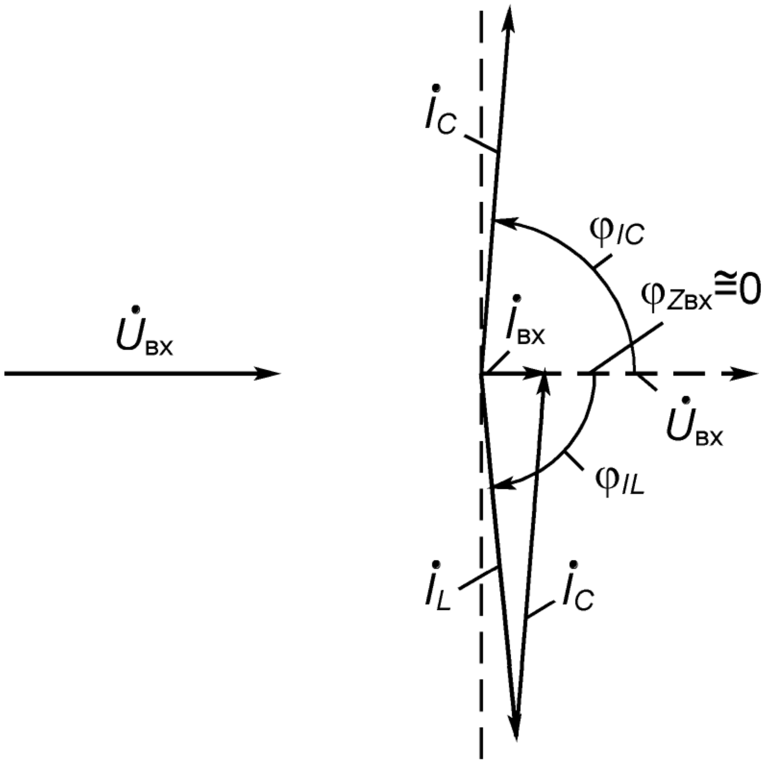


Рис. 7.5. Векторная диаграмма для параллельного колебательного контура на частоте $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ *(близкой к резонансной)*

Видно, что входной ток $I_{\text{вх}}$ по величине оказался намного меньше токов I_L и I_C , а по фазе – практически точно совпал с приложенным к контуру напряжением $U_{\text{вх}}$. Угол $\varphi_{Z\text{вх}} \approx 0$. Это свидетельствует о том, что входное сопротивление контура велико ($I_{\text{вх}}$ мал!) и носит практически чисто активный характер, т.е. рассматриваемый режим действительно близок к режиму резонанса. Приравняв к нулю мнимую часть выражения для комплекса входного сопротивления параллельного КК (рис. 7.1) и решив полученное уравнение относительно частоты (***рекомендуется сделать это самостоятельно!***), получаем выражение для определения частоты точного резонанса:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{1 - R_L^2/\rho^2}{1 - R_C^2/\rho^2}}, \tag{7.6}$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление (***как и для последовательного колебательного контура!***).

Анализ выражения (7.6) позволяет сделать следующие выводы.

1. В общем случае резонансные частоты последовательного и параллельного колебательных контуров, **составленных из одинаковых элементов*, не совпадают и определяются разными формулами*.**

2. **Равенство резонансных частот последовательного и параллельного колебательных контуров**, состоящих из одинаковых элементов, **наблюдается только в *частных* случаях**:

а) если ***потери в реактивных элементах контура равны между собой*** ($R_L = R_C$ – редкий, но реальный случай, обычно потери в дросселе существенно превышают потери в конденсаторе, т.е. $R_L \gg R_C$!);

б) потери в реактивных элементах контура равны нулю (***идеальный колебательный контур***).

3. Если сопротивления R_L и R_C относительно малы ($R_L \ll \rho; R_C \ll \rho$), резонансную частоту параллельного контура без большой погрешности можно рассчитывать по формуле $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$, характерной для последовательного КК (целесообразно предварительно оценить погрешность!).

4. Резонанс в параллельном колебательном контуре возможен лишь в случаях, когда одновременно выполняются неравенства $R_L < \rho$, $R_C < \rho$ или $R_L > \rho$, $R_C > \rho$, т.е. выражение под корнем в формуле (7.6) положительно. В противном случае частота ω_0 является комплексным числом, и резонанс в цепи невозможен.

5. В случае, когда $R_L = R_C = \rho$, наблюдается так называемый «безразличный» резонанс, при котором ***на любой частоте входного сигнала*** входное сопротивление параллельного КК носит чисто активный характер и равно ρ. Очевидно, что входной ток при этом всегда синфазен $U_{вх}$ и равен $U_{вх}/\rho$.

Математический анализ параллельного колебательного контура

Входные частотные характеристики параллельного КК

Комплекс входного сопротивления параллельного КК с учетом потерь в реактивных элементах (рис. 7.1) определяется выражением:

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{(R_L + j\omega L)\cdot(R_C - j\frac{1}{\omega C})}{R_L + R_C + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\rho^2 + R_L \cdot R_C + j(\omega L \cdot R_C - \frac{R_L}{\omega C})}{R_L + R_C + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}. \quad (7.7)$$

Видно, что знаменатель полученного уравнения представляет собой выражение для комплекса входного сопротивления ***последовательного колебательного контура***, составленного из тех же элементов, что и параллельный. Поскольку потери в реальных реактивных компонентах относительно малы, в широком диапазоне частот выполняются неравенства: $R_L << \omega L$; $R_C << 1/\omega C$. Пренебрегая сопротивлениями R_L и R_C в числителе (***только!***) выражения (7.7), получаем:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} \approx \frac{\rho^2}{\underline{Z}_{\text{вх посл}}} = \frac{\rho^2}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\rho^2}{R \cdot (1 + j\xi)}, \tag{7.8}$$

где $R = R_L + R_C$ – суммарное сопротивление потерь, учитывающее совокупные активные потери в конденсаторе и в катушке индуктивности;

$\xi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R} = Q \cdot (\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega})$ – обобщенная расстройка – параметр, введенный ранее при проведении частотного анализа последовательного КК.

При частоте $\omega = \omega_0$, **равной резонансной частоте последовательного контура**, обобщенная расстройка для последовательного КК точно, а для высокодобротного параллельного колебательного контура примерно равна нулю: $\xi \approx 0$. Следовательно, входное сопротивление параллельного КК на этой частоте будет носить практически чисто активный характер и в соответствии с выражением (7.8) составит:

$$\underline{Z}_{0\text{вх}} \approx R_{0\text{э}} = \frac{\rho^2}{R} = Q \cdot \rho = \frac{\omega_0^2 L^2}{R} = \frac{1}{R \cdot \omega_0^2 C^2}. \tag{7.9}$$

Следует отметить, что **при расчете добротности *параллельного* КК** учитываются ***суммарные потери в реактивных*** элементах контура, т.е. $Q = \rho / R = \rho / (R_L + R_C)$!

Характеристическое сопротивление ρ параллельных КК, используемых в радиотехнике, имеет обычно величину 100÷500 Ом, добротность Q составляет 100÷400, поэтому сопротивление $R_{0\text{э}}$ лежит в диапазоне от нескольких десятков до нескольких сотен кОм. Для параллельных КК, используемых в схемах ***промышленной электроники***, этот параметр, как правило, на порядок меньше: от нескольких сотен Ом до нескольких десятков кОм.

Используя выражение (7.8), представим комплекс входного сопротивления параллельного КК в алгебраической форме:

$$\underline{Z}_{вх} \approx \frac{\rho^2}{R\cdot(1+j\xi)} = \frac{R_{0э}}{1+j\xi} = \frac{R_{0э}}{1+\xi^2} - j\frac{\xi\cdot R_{0э}}{1+\xi^2} = R_{вх}(\omega) + jX_{вх}(\omega). \quad (7.10)$$

Из полученного выражения следует, что при необходимости (для упрощения некоторых исследований) ***параллельный*** **КК** может быть представлен в виде ***последовательного соединения***, т.е. эквивалентной схемой, составленной из ***последовательно соединенных*** активного $R_{вх}(\omega) = \dfrac{R_{0э}}{1+\xi^2} = f(\omega)$ и реактивного $X_{вх}(\omega) = (-)\dfrac{\xi\cdot R_{0э}}{1+\xi^2} = f(\omega)$ сопротивлений, являющихся ***частотно-зависимыми величинами***.

Модуль комплекса входного сопротивления:

$$Z_{вх} \approx \sqrt{R_{вх}^2 + X_{вх}^2} = \sqrt{\frac{R_{0э}^2 + \xi^2\cdot R_{0э}^2}{(1+\xi^2)^2}} = \frac{R_{0э}}{\sqrt{1+\xi^2}} =$$
$$= \frac{R_{0э}}{\sqrt{1+Q^2\cdot(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} - \quad (7.11)$$

–выражение, определяющее входную частотную характеристику.

Нормированное входное сопротивление:

$$\frac{Z_{вх}}{R_{0э}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} = n(\omega) - \quad (7.12)$$

– определяется той же формулой, что и нормированная резонансная кривая входного тока ***последовательного колебательного контура*** («норма» тока), составленного из тех же элементов, что и параллельный.

Аргумент комплекса входного сопротивления (т.е. выражение для входной ФЧХ параллельного контура) описывается формулой:

$$\varphi_{Zвх} \approx \text{arctg}\left(\frac{X_{вх}}{R_{вх}}\right) = (-)\,\text{arctg}\left(\frac{\xi\cdot R_{0э}(1+\xi^2)}{(1+\xi^2)\cdot R_{0э}}\right) =$$
$$= (-)\,\text{arctg}\,\xi = (-)\,\text{arctg}\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right). \quad (7.13)$$

На рис. 7.6 приведена входные частотные характеристики параллельного КК, построенные в программе MathCad по выражению (7.11).

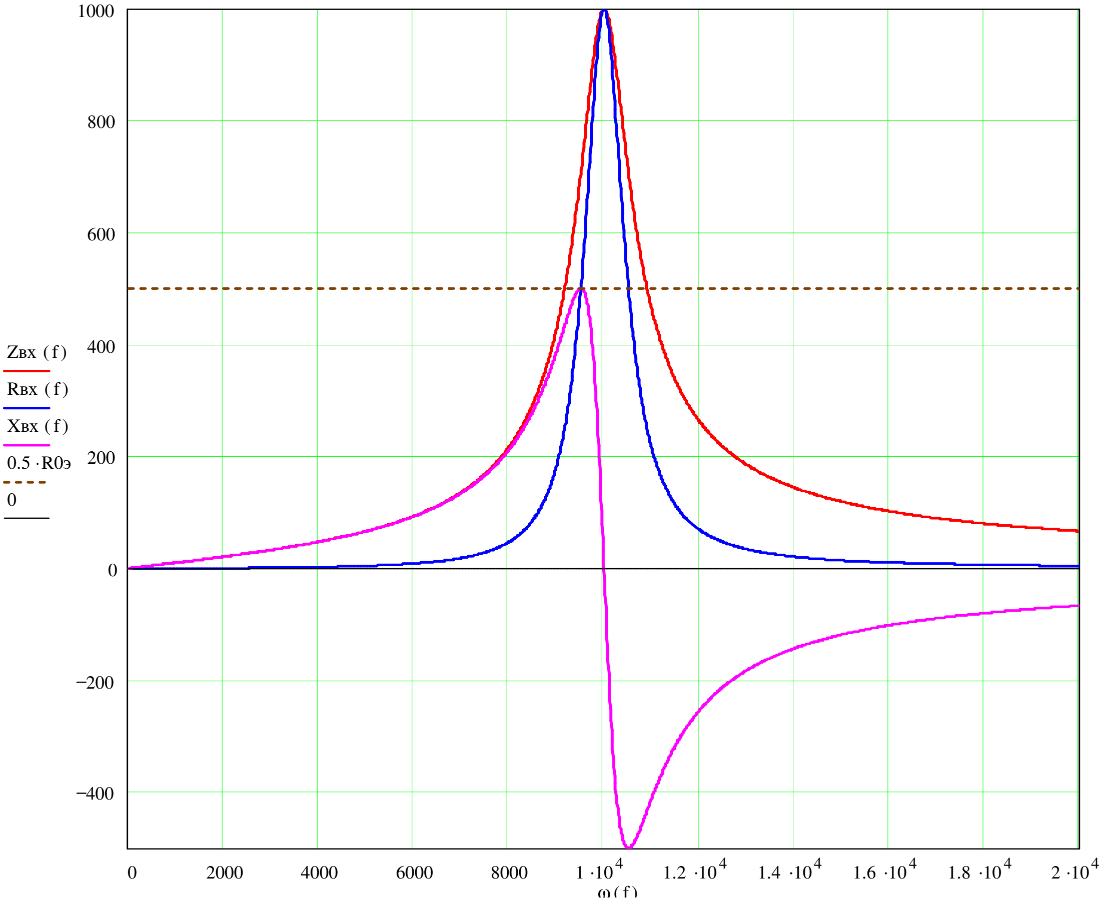


Рис. 7.6. Входные частотные характеристики параллельного КК.
Параметры цепи: $L = 10$ мГн, $R_L = 5$ Ом; $C = 1$ мкФ, $R_C = 5$ Ом;
$\rho = 100$ Ом; $Q = 10$; $R_{0э} = 1000$ Ом; $\omega_0 = 10 \times 10^3$ рад/с

Для объяснения характера поведения входных частотных характеристик параллельного КК в частотной области воспользуемся схемами замещения цепи, построенными для различных частот.

1. Частота входного сигнала $\omega = 0$. → $X_L = \omega L = 0$, $X_C = 1/\omega C = \infty$.

Схема замещения для этого режима показана на рис. 7.7, а.

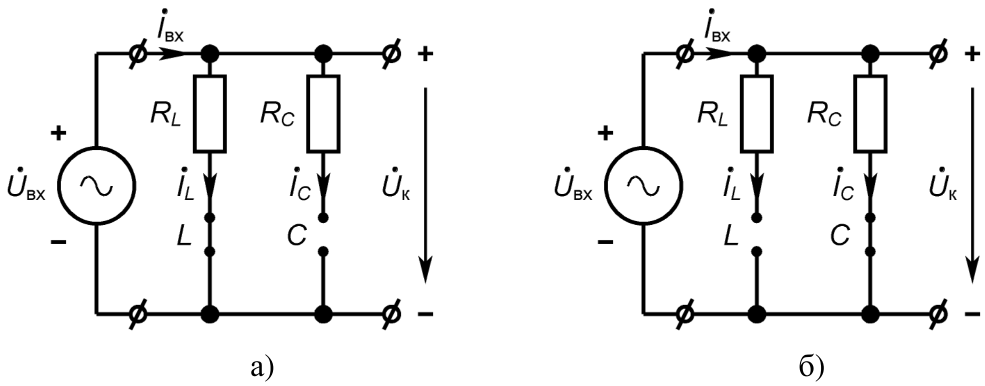


Рис. 7.7. Схемы замещения параллельного КК на предельных частотах

Поскольку $X_C = 1/\omega C = \infty$, ток ветви с конденсатором $I_C = 0$, т.е. конденсатор не влияет на процессы, происходящие в контуре в этом режиме. Входной ток, очевидно, полностью замкнется по ветви с закороченной индуктивностью L и сопротивлением потерь R_L. Величина и характер тока $I_{вх} = I_L = U_{вх} / R_L$ будут определяться только малым сопротивлением активных потерь в индуктивности $R_L >> X_L$, следовательно, реакция цепи является чисто активной, $I_{вх}$ синфазен $U_{вх}$, и $\varphi_Z = 0$. Реактивная составляющая комплекса входного сопротивления $X_{вх}(0) = 0$, т.к. ни конденсатор, ни дроссель не влияют на величину входного тока. Следовательно, полное входное сопротивление при $\omega = 0$ будет представлено только своей активной составляющей:

$$Z_{вх}(0) = R_{вх}(0) = R_L \approx 0. \qquad (7.14)$$

2. **Частота входного сигнала $\omega = \infty$. → $X_L = \omega L = \infty$, $X_C = 1/\omega C = 0$.**

Схема замещения для данного режима показана на рис. 7.7, б.

Так как в данном режиме $X_L = \omega L = \infty$, ток ветви с дросселем $I_L = 0$, т.е. теперь катушка индуктивности не влияет на процессы, происходящие в контуре. Весь входной ток будет протекать по ветви с закороченным конденсатором C и сопротивлением потерь R_C. Величина и характер тока $I_{вх} = I_C = U_{вх} / R_C$ будут определяться только незначительным сопротивлением активных потерь в конденсаторе $R_C >> X_C$, следовательно, реакция цепи является чисто активной, $I_{вх}$ синфазен $U_{вх}$, и $\varphi_Z = 0$. Реактивная составляющая комплекса входного сопротивления $X_{вх}(0) = 0$, т.к. ни дроссель, ни конденсатор не оказывают влияния на величину входного тока. Следовательно, полное входное сопротивление при $\omega = \infty$ будет представлено только своей активной составляющей:

$$Z_{вх}(\infty) = R_{вх}(\infty) = R_C \approx 0. \qquad (7.15)$$

3. **Средние частоты: $0 < \omega_i < \infty$. $X_{Li} = \omega_i L \neq X_{Ci} = 1/\omega_i C$.**

На частотах **ниже резонансной** ($\omega < \omega_0$) при отклонении частоты от нулевого значения сопротивления реактивных элементов приобретают конечные значения, причем выполняется: $X_{Li} = \omega_i L < X_{Ci} = 1/\omega_i C$. Следовательно, пренебрегая малыми потерями $R_L << X_L$ и $R_L << X_L$ для токов в ветвях с дросселем и конденсатором справедливо:

$$I_{Li} \approx U_{вх} / X_{Li} > I_{Ci} \approx U_{вх} / X_{Ci}. \qquad (7.16)$$

Таким образом, **на всех частотах меньше резонансной ω_0** во входном токе $\dot{I}_{вх} = \dot{I}_L + \dot{I}_C$ будет преобладать индуктивная составляющая $I_{Li} > I_{Ci}$, и сам $I_{вх}$ будет носить активно-индуктивный характер. Следовательно, в этом режиме $I_{вх}$ отстает от $U_{вх}$, реакция цепи является активно-индуктивной, и выполняется соотношение: $0 < \varphi_Z < \pi/2$.

Поскольку с ростом частоты увеличивается $X_{Li} = \omega_i L$ и уменьшается $X_{Ci} = 1/\omega_i C$, это обусловливает соответствующее уменьшение тока дросселя $I_{Li} \approx U_{вх} / X_{Li}$ и возрастание тока конденсатора $I_{Ci} \approx U_{вх} / X_{Ci}$. Так как токи I_{Li} и I_{Ci} направлены практически навстречу друг другу и взаимно компенсируются, под влиянием этих факторов входной ток достаточно резко уменьшается с увеличением частоты при $\omega < \omega_0$. Это свидетельствует о сопутствующем этому увеличении входного сопротивления параллельного КК, стремящегося к своему экстремальному значению на резонансе – рис. 7.6 (красная кривая). Следует отметить, что аналогично модулю $Z_{вх}(\omega)$ меняется в частотной области и параметр $R_{вх}(\omega)$ (синяя кривая), оставаясь на всех частотах, кроме резонансной, меньше $Z_{вх}(\omega)$.

Реактивная составляющая $X_{вх}(\omega)$ комплекса $\underline{Z}_{вх}$ в рассматриваемой области частот меняется по сложному закону – рис. 7.6 (розовая кривая). На частотах, меньших резонансной $\omega < \omega_0$, $X_{вх}(\omega) > 0$, что свидетельствует об активно-индуктивном характере цепи (преобладании во входном токе индуктивной составляющей). При относительно низких частотах график $X_{вх}(\omega) = f(\omega)$ практически совпадает с кривой $Z_{вх}(\omega) = f(\omega)$, однако затем отклоняется от нее вниз, достигает на некоторой частоте $\omega_{э1}$ положительного экстремума, после чего начинает достаточно резко падать, стремясь к нулю при $\omega = \omega_0$ – рис. 7.6. Исследования функции $X_{вх}(\omega) = f(\omega)$ (выражение (7.10)) на экстремум, проведенные по известному алгоритму, показали, что экстремальные значения реактивной составляющей $\underline{Z}_{вх}$ наблюдаются на частотах

$$\frac{\omega_{э1,2}}{\omega_0} = \mp\frac{d}{2} + \sqrt{1+\frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2Q}(\sqrt{4Q^2+1} \mp 1), \qquad (7.17)$$

***совпадающих с граничными частотами последовательного КК*, собранного из тех же элементов, что и параллельный.**

Подставляя найденные значения частот в выражение (7.10), после преобразований получаем:

$$X_{вх\,э1,2} = \pm 0{,}5 R_{0э}. \qquad (7.18)$$

4. Резонанс: $\omega = \omega_0$. $X_{L0} = \omega_0 L = X_{C0} = 1/\omega_0 C = \rho$.

Согласно определению резонанса, реакция цепи на резонансной частоте является чисто активной. Следовательно, $I_{вх}$ синфазен $U_{вх}$, и $\varphi_Z = 0$. Реактивная составляющая комплекса входного сопротивления $X_{вх0}(\omega_0) = 0$, а активная – $R_{вх0}(\omega_0) = Z_{вх0}(\omega_0) = Z_{вх\,max} = Q \cdot \rho$. Входной ток на резонансе имеет, очевидно, минимально возможное значение:

$$I_{вх0} = U_{вх} / Z_{вх0} = U_{вх} / R_{0э} = U_{вх} / Q \cdot \rho. \qquad (7.19)$$

Поскольку $X_{L0} = \omega_0 L = X_{C0} = 1/\omega_0 C = \rho$, токи в ветвях параллельного КК на частоте резонанса составляют:

$$I_{L0} \simeq I_{C0} \simeq U_{\text{вх}} / \rho . \qquad (7.20)$$

Следовательно, **для параллельного КК на резонансе имеет место важное соотношение**

$$I_{L0} / I_{\text{вх}0} \simeq U_{\text{вх}} R_{0э} / \rho\, U_{\text{вх}} = R_{0э} / \rho = Q \cdot \rho / \rho = Q , \qquad (7.21)$$

$$I_{C0} / I_{\text{вх}0} \simeq U_{\text{вх}} R_{0э} / \rho\, U_{\text{вх}} = R_{0э} / \rho = Q \cdot \rho / \rho = Q \text{ –}$$

– т.е. **ток любой ветви контура примерно в добротность раз превышает ток, потребляемый от источника сигнала. Это явление получило название «*резонанс токов*» в отличие от резонанса напряжений, наблюдающегося в последовательном колебательном контуре.**

Особенности поведения входных частотных характеристик на частотах, превышающих частоту резонанса ($\omega > \omega_0$), предлагается **выполнить самостоятельно**, воспользовавшись схемой замещения, представленной на рис. 7.7, б (алгоритм анализа аналогичен используемому выше).

На рис. 7.8 представлена входная ФЧХ параллельного КК, построенная с использованием выражения (7.13).

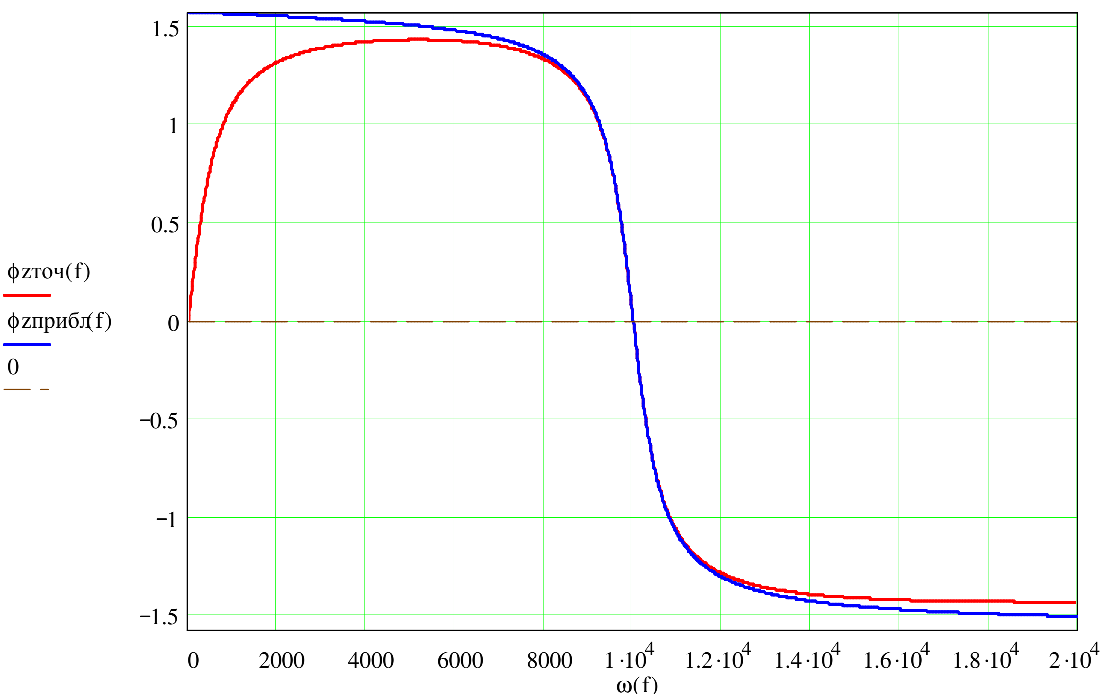


Рис. 7.8. Входные ФЧХ параллельного КК: а) точная – красная кривая; б) приближенная (без учета потерь в реактивных элементах контура) – – синяя кривая

Поведение точной характеристики $\varphi_Z = f(\omega)$ в частотной области – красная кривая – подробно рассмотрено в ходе приведенного выше анализа. Входная ФЧХ, построенная по приближенному выражению (7.13), полученному без учета потерь в реактивных элементах контура (синяя кривая), существенно отличается от точной характеристики в областях частот, примыкающих к предельным частотам $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Это обусловлено тем, что при $\omega = 0$ и $R_L = 0$ реакция цепи является чисто индуктивной, т.к. $I_L = \infty >> I_C = 0$, а при $\omega = \infty$ и $R_C = 0$ – чисто емкостной, поскольку $I_L = 0 << I_C = \infty$.

Передаточные частотные характеристики параллельного КК

Выше уже отмечалось, что при возбуждении параллельного КК от идеального источника напряжения контур не обладает частотно-избирательными свойствами относительно контурного напряжения, поскольку при любой частоте входного сигнала выполняется: $u_{вх}(t) = u_к(t)$. Поэтому в качестве передаточных характеристик для этой цепи принято рассматривать комплексные коэффициенты передачи тока ветвей с катушкой индуктивности $\dot{K}_{IL} = \dot{I}_{IL} / \dot{I}_{вх}$ и конденсатором $\dot{K}_{IC} = \dot{I}_{IC} / \dot{I}_{вх}$.

1. Коэффициент передачи тока $\dot{K}_{IL}$ ветви с катушкой индуктивности параллельного колебательного контура

Ток в индуктивной ветви контура с учетом соотношения $R_L << \omega L$ составляет:

$$\dot{I}_L \approx \dot{U}_{вх} / j\omega L. \tag{7.22}$$

Для комплекса входного тока справедливо:

$$\dot{I}_{вх} = \dot{U}_{вх} / \underline{Z}_{вх}. \tag{7.23}$$

Следовательно, комплекс тока в индуктивной ветви равен

$$\dot{K}_{IL} = \dot{I}_{IL} / \dot{I}_{вх} \approx \underline{Z}_{вх} / j\omega L = \frac{Z_{вх} e^{j\varphi_Z}}{\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{Z_{вх}}{\omega L} e^{j(\varphi_Z - \frac{\pi}{2})} = K_{IL} e^{j\varphi_{KIL}}. \tag{7.24}$$

Модуль этого параметра:

$$K_{IL} \approx \frac{Z_{вх}}{\omega L}\left|\frac{\times R_{0э}\omega_0}{\times R_{0э}\omega_0}\right. = \frac{Z_{вх}}{R_{0э}} \cdot \frac{R_{0э}}{\omega_0 L} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} = n(\omega) \cdot Q \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \; – \tag{7.25}$$

– совпадает с выражением для модуля $K_{UC}(\omega)$ последовательного КК (отличие лишь в том, что здесь выражение ***приближенное***, а для последовательного КК – ***точное***).

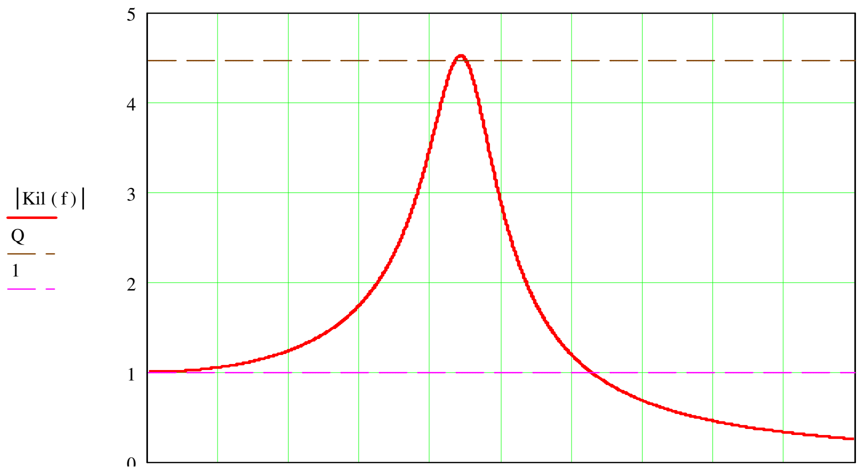
Аргумент коэффициента передачи тока в индуктивной ветви:

$$\varphi_{KIL} = \varphi_Z - \pi/2 \; – \qquad (7.26)$$

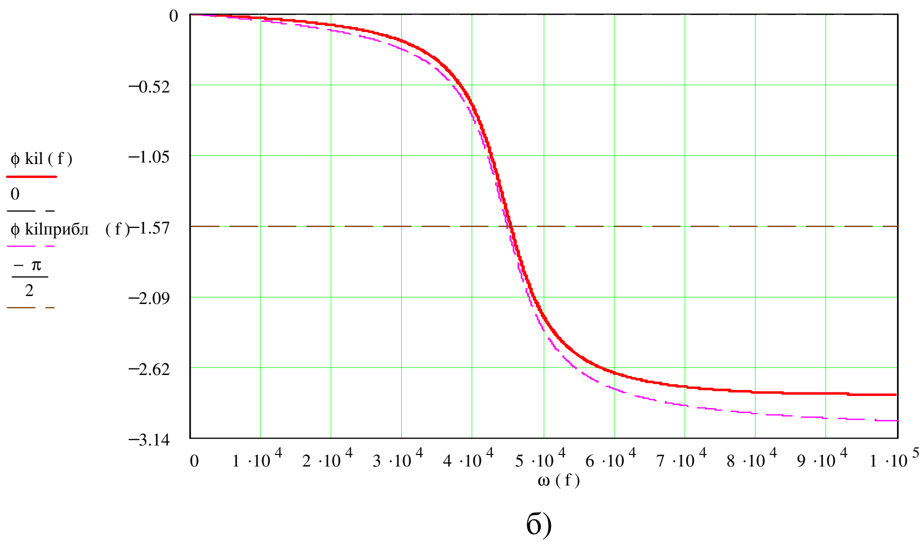
– представляет собой входную ФЧХ параллельного КК, опущенную по оси ординат на $\pi/2$.

Следует отметить, что **передаточные частотные характеристики *для тока в индуктивной ветви параллельного КК* по характеру изменения в частотной области *совпадают с передаточными частотными характеристиками последовательного КК для случая, когда выходной сигнал снимается с конденсатора!***

На рис. 7.9 приведены передаточные частотные характеристики параллельного КК для тока в ветви с индуктивностью: а – АЧХ; б – ФЧХ.



а)



б)

Рис. 7.9. Передаточные частотные характеристики параллельного КК для тока в индуктивной ветви: а) АЧХ; б) ФЧХ (пунктир – приближенная характеристика, построенная без учета потерь в реактивных элементах)

2. Коэффициент передачи тока $\dot{K}_{IC}$ ветви с конденсатором параллельного колебательного контура

Ток в ветви с конденсатором параллельного КК определяется выражением (потерями в конденсаторе $R_C << 1/\omega C$ пренебрегаем):

$$\dot{I}_C \approx \dot{U}_{\text{вх}} \cdot j\omega C. \qquad (7.27)$$

Тогда, с учетом выражения (7.23), определяющего $\dot{I}_{\text{вх}}$, для комплекса $\dot{K}_{IC}$ справедливо:

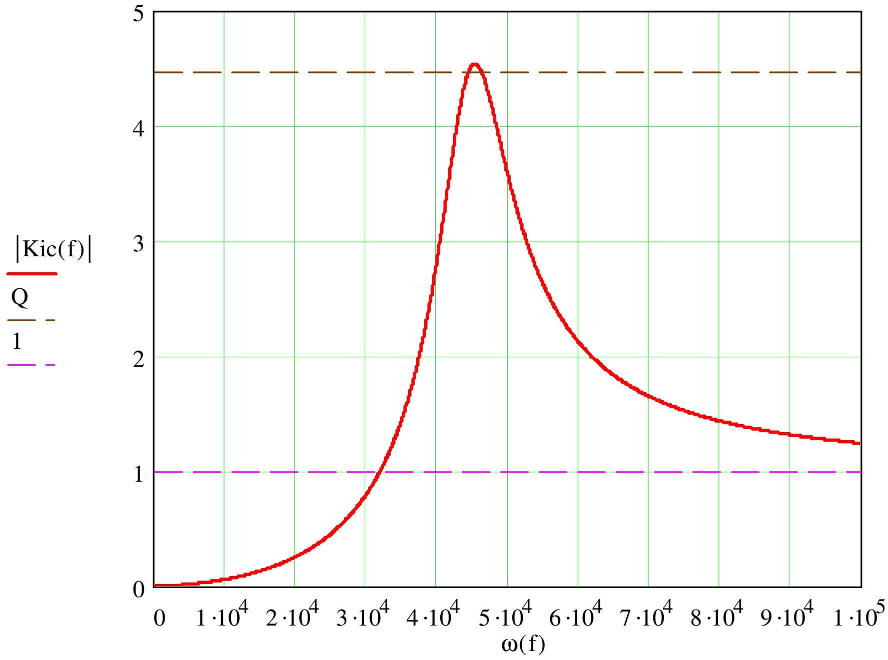
$$\begin{aligned} \dot{K}_{IC} = \dot{I}_{IC} / \dot{I}_{\text{вх}} &\approx \underline{Z}_{\text{вх}} \cdot j\omega C = Z_{\text{вх}} e^{j\varphi_Z} \cdot \omega C \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \\ &= Z_{\text{вх}} \omega C \cdot e^{j(\varphi_Z + \frac{\pi}{2})} = K_{IC} \cdot e^{j\varphi_{KIC}}. \end{aligned} \qquad (7.28)$$

Модуль коэффициента передачи тока в ветви с конденсатором:

$$K_{IC} \approx Z_{\text{вх}} \cdot \omega C \Big| \frac{\times R_{0э}\omega_0}{\times R_{0э}\omega_0} = \frac{Z_{\text{вх}}}{R_{0э}} \cdot \omega_0 C \cdot R_{0э} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = n(\omega) \cdot Q \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \qquad (7.29)$$

– идентично выражению для модуля $K_{UL}(\omega)$ последовательного КК (разница лишь в том, что полученное выражение является ***приближенным***, а аналогичное для последовательного КК – ***точным***).

Передаточные частотные характеристики параллельного КК для тока ветви с конденсатором приведены на рис. 7.10: а – АЧХ; б – ФЧХ.



а)

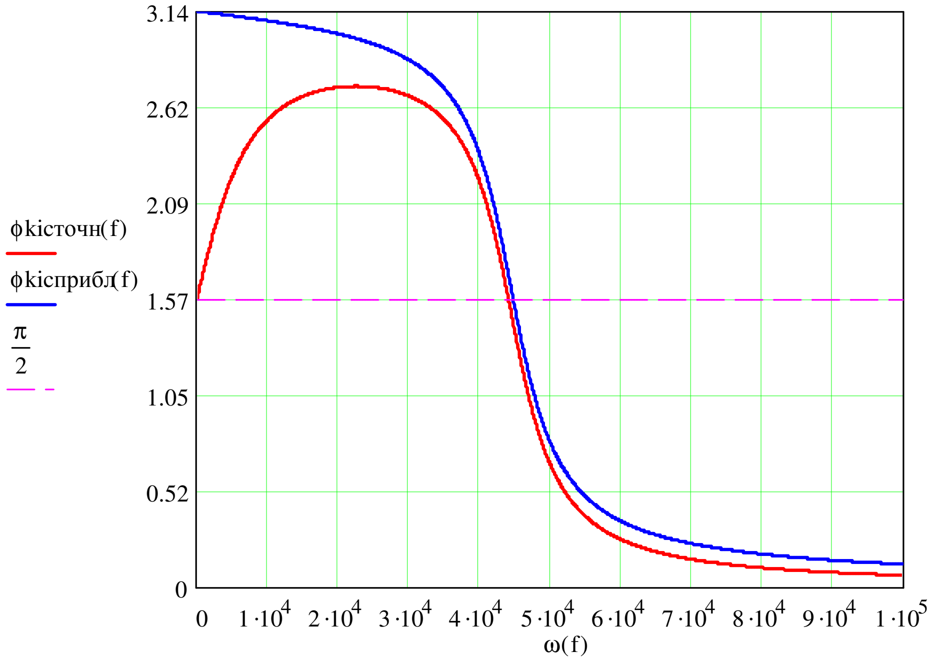


Рис. 7.10. Передаточные частотные характеристики параллельного КК для тока ветви с конденсатором: а) АЧХ; б) ФЧХ (пунктир – приближенная характеристика, построенная без учета потерь в реактивных элементах)

Из рис. 7.10 следует, что по характеру изменения в частотной области построенные **характеристики действительно подобны передаточным частотным характеристикам последовательно КК в случае, когда *выходным сигналом последнего является напряжение катушки индуктивности L.***

Передаточные частотные характеристики параллельного КК при возбуждении его источником тока *I*.

При рассмотрении входных частотных характеристик параллельного колебательного контура было показано, что **полное входное сопротивление контура (т.е. модуль $\underline{Z}_{\text{вх}}$) ведет себя в частотной области точно так же, как и входной ток последовательного КК, собранного из тех же элементов: на предельных частотах ω = 0 и ω = ∞ этот параметр практически равен нулю, а на частоте резонанса ω_0 равен максимально возможному значению** $Z_{\text{вх}0} = R_{0\text{э}} = Q \cdot \rho$**.** Кроме того, выяснилось, что нормированное входное сопротивление параллельного КК описывается тем же выражением, что и норма контурного тока $n(\omega)$. Следовательно, если возбуждать этот контур не источником напряжения, а источником тока $I = const$, то контурное напряжение $U_{\text{к}} = I \cdot Z_{\text{вх}}(\omega)$ при изменении частоты будет меняться точно так же, как и $Z_{\text{вх}}(\omega)$. Очевидно, что при этом контурное напряжение $U_{\text{к}}$ параллельного КК приобретает частотно-избирательные свойства, присущие последовательному контуру, и **все параметры, характеризующие эти свойства (граничные частоты, полоса пропускания и пр.) будут описываться теми же формулами, что и для последовательного КК! – см. раздел курса, в котором рассматривается последовательный колебательный контур.**

Схема, изображающая параллельный КК, возбуждаемый от источника неизменного тока *I*, показана на рис. 7.11.

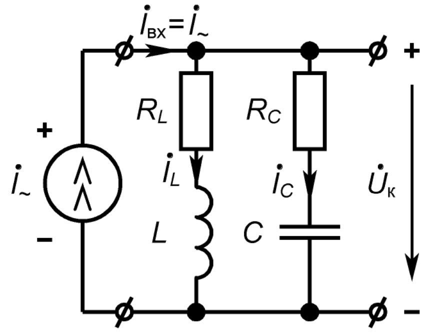


Рис. 7.11. Параллельный КК, возбуждаемый от источника тока

Пусть источник тока формирует неизменный по величине синусоидальный ток с нулевой начальной фазой:

$$i(t) = I_m \sin \omega t = const. \tag{7.30}$$

В комплексном виде для действующего значения этого тока справедливо

$$\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{j\varphi_I} = I \cdot \mathrm{e}^{j0} = I. \tag{7.31}$$

Модуль действующего напряжения на контуре, очевидно, равен:

$$U_к = I \cdot Z_{вх} \approx I \frac{R_{0э}}{\sqrt{1+\xi^2}} = I \frac{R_{0э}}{\sqrt{1+Q^2 \cdot (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}. \tag{7.31}$$

Представим это напряжение в нормированном виде, разделив на значение контурного напряжения на резонансе $U_{к0} = I \cdot R_{0э}$:

$$\begin{aligned} U_{к\,норм} &= U_к / U_{к0} = \frac{I \cdot Z_{вх}}{I \cdot R_{0э}} = \frac{Z_{вх}}{R_{0э}} = \frac{R_{0э}}{R_{0э}\sqrt{1+\xi^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = n(\omega). \end{aligned} \tag{7.32}$$

Нормированное напряжение на контуре изображено на рис. 7.12.

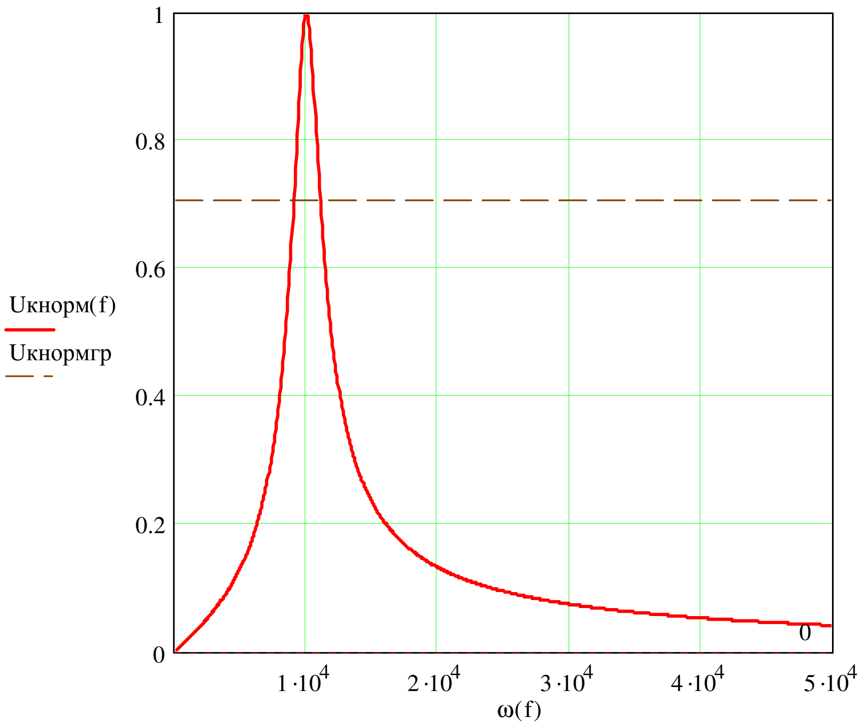


Рис. 7.12. Нормированное контурное напряжение на параллельном КК, возбуждаемым идеальным источником тока

Видно, что представленная кривая имеет точно такой же характер изменения в частотной области, как и нормированная частотная характеристика входного тока последовательного колебательного контура.

Используя выражение (7.32), по известной методике получаем параметры, характеризующие частотно-избирательные свойства параллельного КК, возбуждаемого от идеального источника тока:

а) граничные частоты

$$\frac{\omega_н}{\omega_0} = -\frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2Q}(\sqrt{4Q^2 + 1} - 1); \qquad (7.33)$$

$$\frac{\omega_в}{\omega_0} = \frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2Q}(\sqrt{4Q^2 + 1} + 1). \qquad (7.34)$$

б) абсолютная полоса пропускания контура:

$$\Delta\omega = \omega_в - \omega_н = \omega_0 d = \omega_0 / Q. \qquad (7.35)$$

в) относительная полоса пропускания:

$$\Delta\omega / \omega_0 = (\omega_в - \omega_н) / \omega_0 = d = 1/Q. \qquad (7.36)$$

При расчете указанных параметров необходимо учитывать, что **добротность параллельного колебательного контура (так называемая *собственная* добротность параллельного КК) определяется суммой потерь в реактивных элементах цепи: $Q = \rho/(R_L + R_C)$.**

Передаточные частотные характеристики параллельного КК при возбуждении его от реального источника напряжения с конечной величиной внутреннего сопротивления $R_г$.

Идеальный источник тока, т.е. источник электроэнергии с бесконечно большим внутренним сопротивлением – это идеальный элемент, абстрактное понятие, не существующее в природе. При работе любого устройства, в том числе и реального источника питания, вырабатывающего электроэнергию, на его внутренних цепях всегда имеют место бесполезные потери энергии: на контактах, на проводах, выводах, на осуществление самого процесса получения электроэнергии, и т.д. Следовательно, количество энергии, которую может отдать источник во внешнюю цепь, всегда меньше энергии, которую он вырабатывает. Внутренние потери энергии источника питания принято характеризовать его внутренним сопротивлением $R_г$, являющимся важнейшим параметром любого источника. Рассмотрим, как влияет величина $R_г$ источника сигнала, используемого для возбуждения параллельного КК, на частотно-избирательные свойства последнего.

На рис. 7.13 приведен параллельный колебательный контур с реальным источником возбуждения, обладающим конечной величиной внутреннего сопротивления $R_г$.

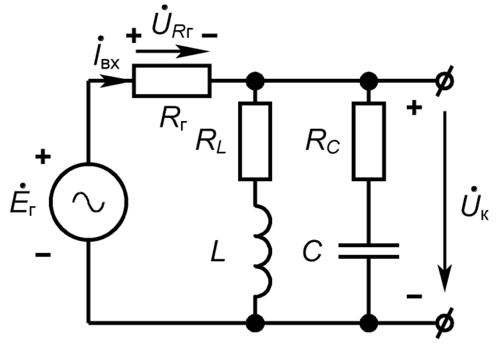


Рис. 7.13. Возбуждение параллельного КК от реального источника напряжения с конечной величиной внутреннего сопротивления $R_г$

Для комплекса напряжения на контуре $\dot{U}_к$ справедливо:

$$\dot{U}_к = \dot{I}_{вх} \cdot \underline{Z}_{вх} = \frac{\dot{E}_г \cdot \underline{Z}_{вх}}{R_г + \underline{Z}_{вх}}. \tag{7.37}$$

На частоте резонанса ω = ω_0 при $Z_{вх0} = R_{0э} = Q \cdot \rho$ выполняется

$$\dot{U}_{к0} = \dot{I}_{вх0} \cdot Z_{вх0} = \frac{\dot{E}_г \cdot R_{0э}}{R_г + R_{0э}}. \tag{7.38}$$

Используя известное выражение $\underline{Z}_{вх} = R_{0э} / (1 + j\xi)$, для контурного напряжения в нормированном виде получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_к}{\dot{U}_{к0}} &= \frac{\underline{Z}_{вх} \cdot (R_г + R_{0э})}{(R_г + \underline{Z}_{вх}) \cdot R_{0э}} = \frac{R_{0э}(R_г + R_{0э})}{(1 + j\xi) R_{0э}(R_г + R_{0э} / (1 + j\xi))} = \\ &= \frac{R_г + R_{0э}}{R_{0э} + R_г(1 + j\xi)} = \frac{R_г + R_{0э}}{R_г + R_{0э} + j\xi R_г}. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Введем понятие эквивалентной добротности ***параллельного*** колебательного контура $Q_э$:

$$Q_э = \frac{Q}{1 + \dfrac{R_{0э}}{R_г}}. \tag{7.40}$$

Из выражения (7.40) следует:

а) если на входе цепи действует идеальный источник напряжения ($R_г = 0$), то $Q_э = 0$, т.е. параллельный колебательный контур не обладает частотно-избирательными свойствами;

б) в случае, когда на входе цепи действует идеальный источник тока ($R_г = \infty$), то $Q_э = Q = \rho/(R_L + R_C)$, следовательно, параллельный колебательный контур обладает точно такими же частотно-избирательными свойствами, как у последовательного контура, собранного из тех же элементов.

С учетом выражений для $Q_э$ и ξ (обобщенная расстройка – см. предыдущий раздел курса), из формулы (7.39) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_к}{\dot{U}_{к0}} &= \frac{1}{1 + j\dfrac{R_г \cdot \xi}{R_г + R_{0э}}} = \frac{1}{1 + j\dfrac{Q}{1 + (R_{0э} / R_г)}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + jQ_э\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Модуль нормированного контурного напряжения, описывающий амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) этого параметра, определяется по известной методике и составляет:

$$\frac{U_{\text{к}}}{U_{\text{к}0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{\text{э}}^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}. \qquad (7.42)$$

Аргумент комплекса $\frac{\dot{U}_{\text{к}}}{\dot{U}_{\text{к}0}}$, представляющий ФЧХ рассматриваемого параметра, описывается формулой:

$$\varphi_{KU} = (-)\operatorname{arctg}\left(Q_{\text{э}} (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) \right). \qquad (7.43)$$

На рис. 7.14 представлены АЧХ нормированного контурного напряжения параллельного КК, возбуждаемого от источника напряжения с конечной величиной внутреннего сопротивления, при различных значениях эквивалентной добротности $Q_{\text{э}}$.

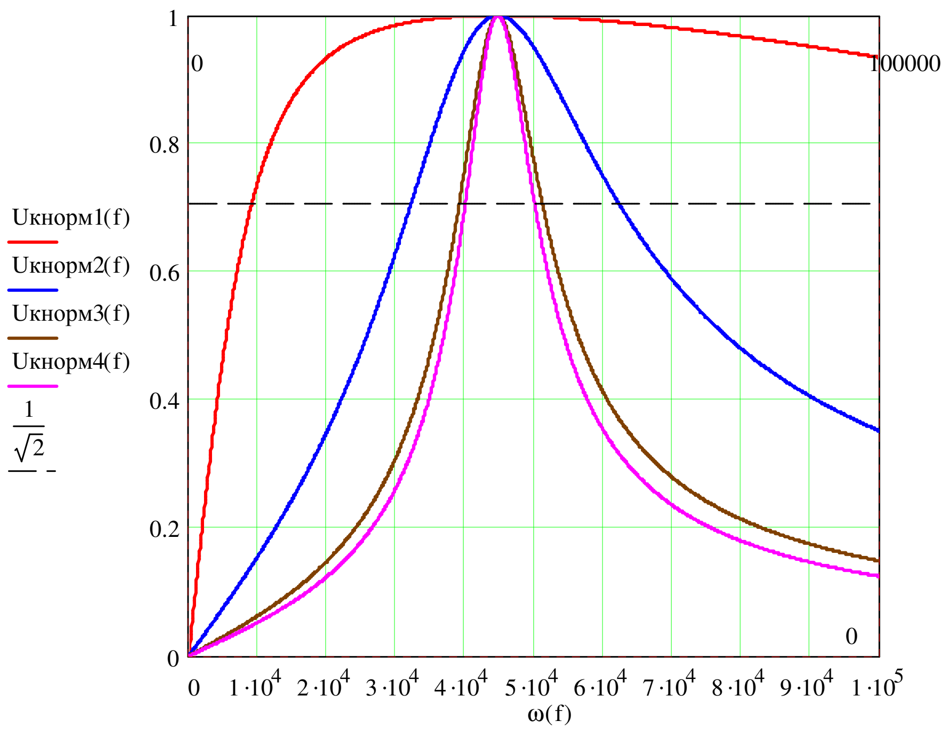


Рис. 7.14. АЧХ контурного напряжения параллельного КК, возбуждаемого от реального источника сигнала с конечной величиной внутреннего сопротивления, при различных эквивалентных добротностях контура: $Q_{\text{э}} \approx 0,213$ – красная кривая; $Q_{\text{э}} \approx 1,5$ – синяя кривая; $Q_{\text{э}} \approx 3,7$ – коричневая кривая; $Q_{\text{э}} \approx 4,5$ – розовая кривая

Кривые, отображающие фазочастотные характеристики этого же параметра при тех же условиях, представлены на рис.7.15.

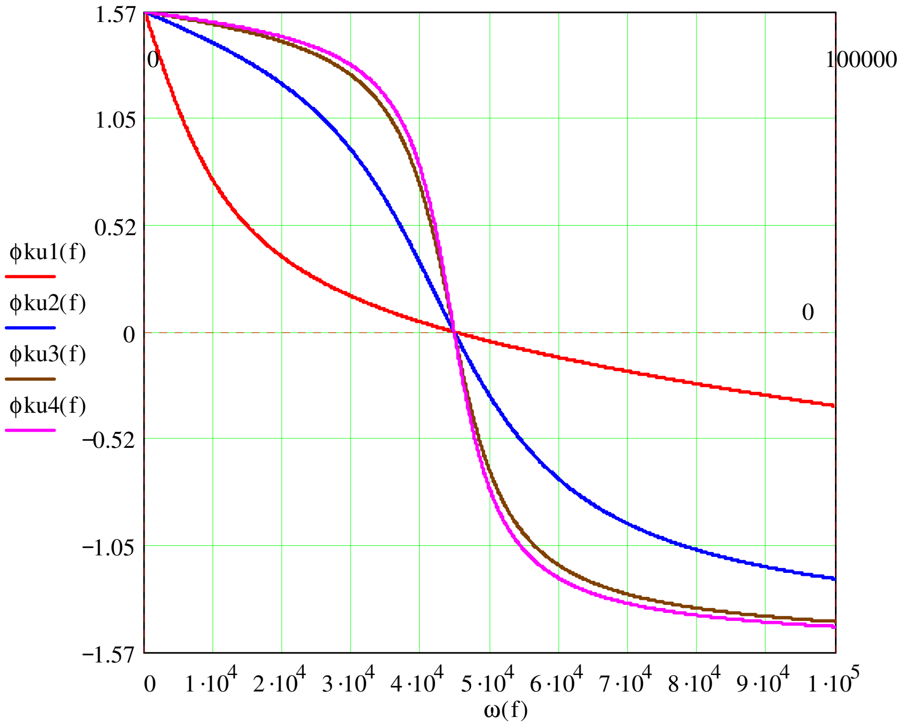


Рис. 7.15. ФЧХ контурного напряжения параллельного КК, возбуждаемого от реального источника сигнала с конечной величиной внутреннего сопротивления, при различных эквивалентных добротностях контура: $Q_э \approx 0{,}213$ – красная кривая; $Q_э \approx 1{,}5$ – синяя кривая; $Q_э \approx 3{,}7$ – коричневая кривая; $Q_э \approx 4{,}5$ – розовая кривая

Видно, что с увеличением эквивалентной добротности $Q_э$ полоса пропускания цепи сужается, что свидетельствует об улучшении ее частотно-избирательных свойств – рис.7.14. Наиболее ярко эта тенденция проявляется при относительно небольших добротностях. При $Q_э < 1$ рассматриваемая цепь практически не обладает частотной избирательностью – красная кривая. Как уже отмечалось, наилучшая частотная избирательность, идентичная избирательности последовательного КК, собранного из тех же элементов, наблюдается при $R_г = \infty$ (возбуждение параллельного КК от источника тока – предельный случай!).

Анализируя фазочастотные характеристики $\varphi_{KU} = f(\omega)$ нормированного контурного напряжения параллельного КК в предложенных условиях работы, отметим следующие закономерности. На предельных частотах $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ для всех рассматриваемых кривых выполняется:

$$\varphi_{KU}(0) = \pi / 2\,,\ \varphi_{KU}(\infty) = -\pi / 2\,, \tag{7.44}$$

что соответствует результатам проведенного мат.анализа.

На частоте резонанса $\omega = \omega_0$ для всех кривых, как и должно быть (реакция цепи – чисто активная!), имеет место равенство

$$\varphi_{KU}(\omega_0) = 0. \qquad (7.44)$$

Однако крутизна изменения $\varphi_{KU}(\omega)$ в частотной области существенно зависит от эквивалентной добротности $Q_э$, при которой снимается характеристика. В областях частот, примыкающих к предельным значениям $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, скорость изменения $\Delta\varphi_{KU} / \Delta\omega$ относительно невелика, причем чем больше $Q_э$, тем меньше скорость изменения $\varphi_{KU}(\omega)$. По мере приближения к частоте резонанса крутизна всех характеристик возрастает, и в окрестностях $\omega = \omega0$ достигает максимально возможного значения. Чем больше $Q_э$, тем выше скорость изменения $\Delta\varphi_{KU} / \Delta\omega$, но полоса частот, в которой наблюдается это явление, сужается. **Это необходимо учитывать, снимая ФЧХ колебательных контуров экспериментально с помощью соответствующих измерительных приборов.**

Используя известную методику, определим граничные частоты и полосу пропускания рассматриваемой цепи.

Граничное значение нормированного контурного напряжения с учетом выражения (7.42) составляет:

$$\left(\frac{U_к}{U_{к0}}\right)_{гр} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_э^2 (\frac{\omega_{гр}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{гр}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (7.45)$$

Решая полученное уравнение относительно граничных частот, после преобразований получаем:

$$f_{гр1} = f_н = \frac{f_0}{2Q_э}(\sqrt{1 + 4Q_э^2} - 1), \qquad (7.46)$$

$$f_{гр2} = f_в = \frac{f_0}{2Q_э}(\sqrt{1 + 4Q_э^2} + 1). \qquad (7.47)$$

При этом абсолютная и относительная полосы пропускания контура составляют:

$$\Delta f = f_в - f_н = \frac{f_0}{Q_э} = \frac{f_0}{Q}\left(1 + \frac{R_{0э}}{R_г}\right), \qquad (7.48)$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \delta f_0 = \frac{1}{Q}\left(1 + \frac{R_{0э}}{R_г}\right) = d\left(1 + \frac{R_{0э}}{R_г}\right), \qquad (7.49)$$

где $Q = \dfrac{\rho}{R_L + R_C}$ – собственная добротность параллельного колебательного контура, не зависящая от внутреннего сопротивления источника входного сигнала.

Сравнивая полученные уравнения с выражениями, определяющими аналогичные параметры для последовательного колебательного контура, собранного из таких же элементов, следует отметить, что формулы отличаются лишь одним: в рассматриваемом случае **вместо обычной добротности *Q* используется *эквивалентная*** $Q_э = Q/\left(1 + R_{0э}/R_г\right)$, учитывающая влияние конечной величины внутреннего сопротивления источника входного сигнала. Это свидетельствует о том, что в общем случае параллельный колебательный контур обладает более широкой полосой пропускания, чем последовательный, составленный из тех же элементов, и только при $R_г = \infty$ их полосы пропускания, а, следовательно, и частотно-избирательные свойства будут одинаковы. Таким образом, **для улучшения избирательности параллельный КК следует возбуждать от источника с максимально возможным внутренним сопротивлением $R_г$.**