Тема 3:

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

План темы 3 «Транспортная задача»:

3.1. Постановка задачи, основные определения
3.2. Закрытая и открытая транспортная задача
3.3. Метод северо-западного угла
3.4. Метод потенциалов
3.5. Метод минимального тарифа

Цель транспортной задачи - разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок.

Исторические этапы исследований транспортной задачи

I этап. Задача национального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж в железнодорожных перевозках при наличии не более двух поставщиков
Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании. - Социалистический транспорт, 1939, № 9.

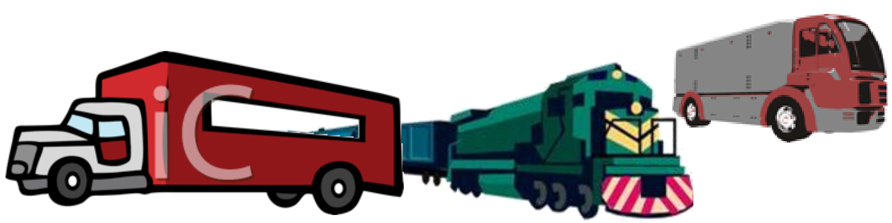
II этап. Одну из разновидностей транспортной задачи в 1941 г. Поставил американец Хичкок. Детально разобрал **Тьяллинг Чарльз Купманс**, который работал членом Объединенного комитета перевозок во время Второй мировой войны.

III этап. Первый общий, законченный метод решения транспортной задачи («метод потенциалов») разработан **Леонидом Канторовичем**.
Канторович Л. В., Гавурин М. К., Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков, Сб. ст. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, АН СССР, 1949

На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

1. Необходимо найти оптимальную структуру транспортных средств, обеспечивающую минимизацию издержек на транспортировку.

эксплуатационные и экономические показатели зависят от состава транспорта



На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

2. Необходимо установить такое распределение грузов между имеющимися в хозяйстве видами транспорта, при котором затраты на перевозки всего объёма грузов были бы минимальными

эффективность использования различного транспорта на одной и той же работе не всегда одинакова

На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

3. Задача прикрепления потребителей к поставщикам

экономичный план перевозок однородного груза из пункта производства в пункты потребления

минимум денежно-материальных затрат на перевозки

минимум приведенных затрат

минимум затрат времени на перевозки

минимум объёма транспортных работ

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах отправления в количествах $a_1, a_2, \dots a_m$ единиц соответственно, необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения в количествах $b_1, b_2, \dots b_n$ единиц соответственно.

Стоимость (расстояние) перевозки единицы продукта из ***i-го*** пункта отправления в ***j-й*** пункт назначения равна c_{ij} *(стоимость доставки)* и известна для каждого маршрута.

Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из ***i-го*** пункта отправления в ***j-й*** пункт назначения.

Содержательная постановка задачи

Задача заключается в определении таких величин x_{ij} для всех маршрутов, при которых суммарная стоимость или расстояние перевозок были бы минимальными.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Обозначения:

m – количество пунктов отправления (поставщиков);

i – номер поставщика;

n – количество пунктов назначения (потребителей);

j – номер потребителя;

a_i – объем однородного груза i-го поставщика (запасы);

b_i – объем однородного груза, требуемого j-ому потребителю (спрос);

c_{ij} – стоимость доставки единицы груза i-го поставщика j-ому потребителю;

x_{ij} – количество груза, доставляемое от i-го поставщика к j-му потребителю;

C – общие затраты на перевозки.

потребители

поставщики

Потреб. Поставщ.	*1*	…	*j*	…	*n*	*Запас*
1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Спрос	b_1	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a = \sum_{j=1}^{n} b$

стоимость доставки единицы груза от *i-го* поставщика к *j-ому* потребителю

Стоимость перевозок можно выразить так

$$C = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to min$$

или более компактно

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

это **целевая функция**, которая позволяет определить численное значение критерия оптимальности на всех этапах расчетов и в оптимальном плане

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:

1 условие. Вывоз всего груза от каждого поставщика:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{11} + & \dots & + x_{ij} + & \dots & + x_{1n} & = a_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{i1} + & \dots & + x_{ij} + & \dots & + x_{in} & = a_i \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{m1} + & \dots & + x_{mj} + & \dots & + x_{mn} & = a_m
\end{array}
$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$ где $i = 1 \dots m$

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:

2 условие. Удовлетворение спроса каждого потребителя:

$$\begin{array}{cccccc}
x_{11}\ + & \dots & +\ x_{i1}\ + & \dots & +\ x_{m1} & =b_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{1j}\ + & \dots & +\ x_{ij}\ + & \dots & +\ x_{mj} & =b_j \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{1n}\ + & \dots & +\ x_{1n}\ + & \dots & +\ x_{mn} & =b_n
\end{array}$$

или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j}$$ где $j = 1 \dots m$

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:

3 условие. Равенство запаса и спроса:

$$\boxed{a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_j + \ldots + b_n}$$

или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j}$$

Равенство запаса и спроса есть необходимое и достаточное условие совместимости и, следовательно, разрешимости транспортной задачи.

Закрытая модель транспортной задачи

Спрос равен запасу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Открытая модель транспортной задачи

Спрос не равен запасу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Модель закрытой транспортной задачи

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Открытая модель транспортной задачи

1. Запас превышает спрос $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. Спрос превышает запас $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

1. Запас превышает спрос

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

При ограничениях:

если $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Не требуется весь имеющийся груз вывозить от поставщика, после удовлетворения спроса часть его может остаться не вывезенной

Потребности (спрос) каждого потребителя необходимо удовлетворить полностью

1. Запас превышает спрос

Решение

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

Фиктивный потребитель

$$c_{n+1} = 0$$

При введении <u>фиктивного потребителя</u> открытая модель преобразуется в закрытую

2. Спрос превышает запас

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

При ограничениях:

если $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

2. Спрос превышает запас

Решение

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}$$

Фиктивный поставщик

«Метод северо-западного угла» на примере:

Пример:

С 3-х баз требуется доставить в магазины однородный товар. Пусть на базе А1 имеется 50 единиц груза, на базе А2 – 40 единиц, на базе А3 – 20 единиц. Указанный товар нужно отгрузить 4-м потребителям: В1, В2, В3, В4, потребности которых составляют соответственно 35, 25, 35, 20 единиц товара. Стоимость перевозки от базы до потребителей представлена в таблице:

	B1	***B2***	***B3***	***B4***
A1	3	2	4	6
A2	2	3	1	2
A3	3	2	7	4

***Требуется** составить такой план перевозок, который обеспечит минимальные транспортные расходы.*

Решение:

1 этап. *Составление распределительной таблицы*

	B1	B2	B3	B4	Наличие товара
A1	3	2	4	6	50
A2	2	3	1	2	40
A3	3	2	7	4	20
Потребность в товаре	30	25	35	20	110

Решение:

2 этап. *Составление модели*

Целевая функция (*стоимость всей перевозки*):

$$C = 3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 3x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \to min$$

Проверяем задачу на разрешимость: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 50 + 40 + 20 = 110, \sum_{j=1}^{4} b_j = 30 + 25 + 35 + 20 = 110$$

Ограничения по поставкам

$$\begin{cases} x11 + x12 + x13 + x14 = 50 \\ x21 + x22 + x23 + x\ 24 = 40 \\ x31 + x32 + x33 + x34 = 20 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}$$

Ограничения по потребителям

$$\begin{cases} x11 + x21 + x31 = 30 \\ x12 + x22 + x32 = 25 \\ x13 + x23 + x33 = 35 \\ x14 + x24 + x34 = 20 \end{cases}$$