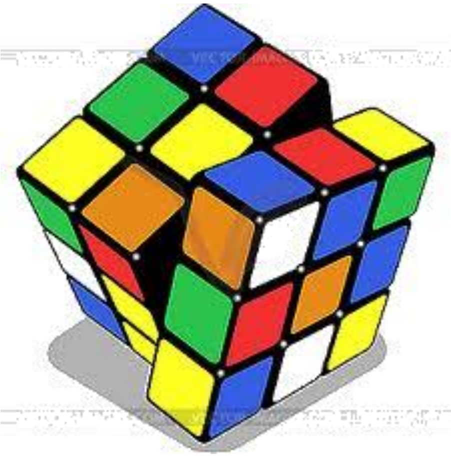
ТЕМА 6:

ТЕОРИЯ ИГР



Рекомендуемая литература:

1. Петросян Л. А. Теория игр. — 2-е изд. — СПб. : БХВ-Петербург, 2012. — 424 с.
2. Колесник Г. В. Теория игр. — 3-е изд. — М. : Либроком, 2012. — 152 с.
3. Лабскер Л. Г. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач) — М. : КноРус, 2012. — 264 с.
4. Оуэн Г. Теория игр. — М. : Мир, 1971. — 230 с.
5. Васин А. А. Теория игр и модели математической экономики — М. : МАКС Пресс, 2005. — 272 с.
6. Печерский С. Л. Теория игр для экономистов. Вводный курс. — СПб. : Изд-во Европейского университета, 2001. — 342 с.

6.1.Введение в теорию игр
6.2. Матричные игры
6.3. Игры с природой

Теория игр – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

Теория игр опирается на предположение о том, что независимо от цели игры и ее обстоятельств найдется стратегия, которая позволит добиться успеха.

это всегда происходит по определенным правилам, но иногда их трудно распознать

Жозеф Луи Франсуа Бертран

французский математик

11.03.1822 – 05.04.1900

1. Профессор Политехнической школы и Колледжа Франции, член Парижской академии наук.
2. Работал в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятности и термодинамики.
3. Дал математическую трактовку стратегии в играх в курсе теории вероятностей «Calcul des probabilités» в 1889 г.

Джон фон Нейман

венгро-американский математик еврейского происхождения

03.12.1903 – 08.02.1957

1)Профессор Принстонского университета США.

2) Сотрудник RAND Corporation (*американский стратегический центр для обеспечения национальной безопасности страны*).

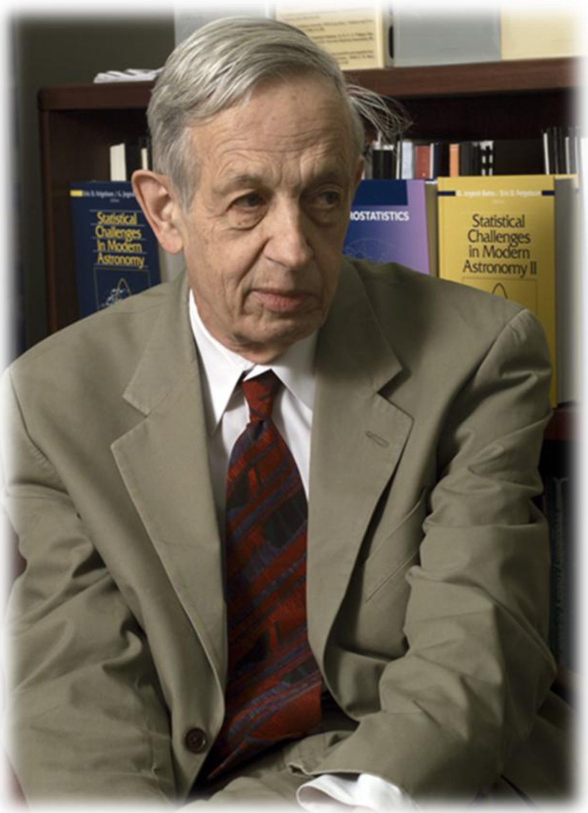
3)Внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения.

2) Важную роль в экономике сыграла теория игр, разработанная Нейманом и О. Моргенштерном

Монография является классическим, основополагающим трудом по теории игр. Большинство понятий и идей, разрабатываемых в настоящее время в теории игр, берут свое начало из этого труда

Джон Форбс Нэш

американский математик



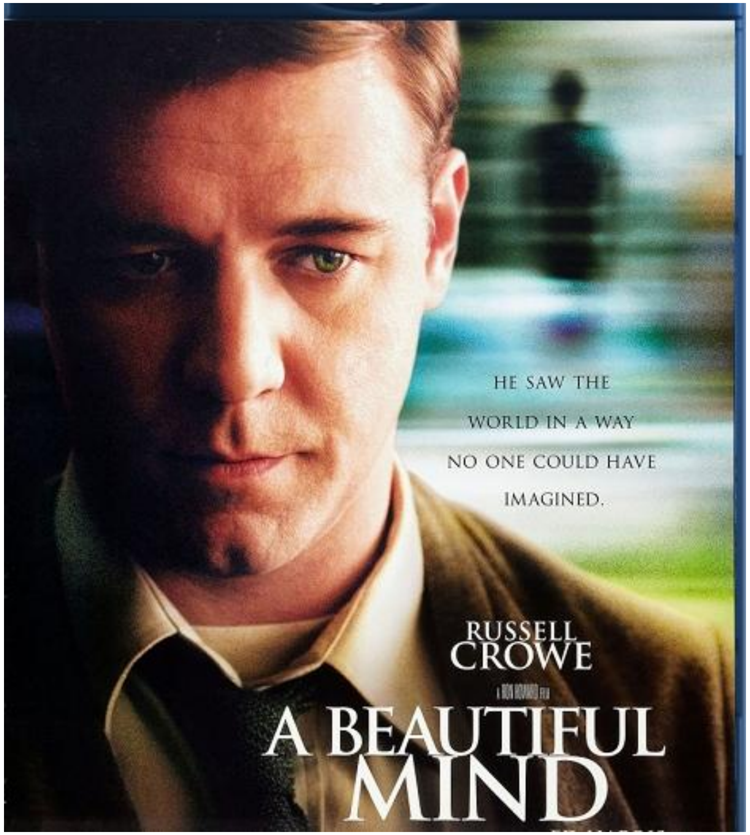
1. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года «За анализ равновесия в теории некооперативных игр».
2. Сотрудник RAND Corporation.
3. Работал в Принстоне и Массачусетском технологическом институте, получил звание профессора Принстонского университета

13 июня 1928 г.

Дж. Нэш доказал, что классический подход к конкуренции А.Смита, когда каждый сам за себя, неоптимален.

Наиболее оптимальны те стратегии, при которых каждый старается сделать лучше для себя, делая
лучше для других.

«Игры разума» (2001 г.)



– реж. Рон Ховард
– гл. роли Рассел Кроу, Дженнифер Коннелли
– награды: четыре «Оскара» *(лучший фильм, адаптированный сценарий, режиссура, актриса второго плана)*, «Золотой глобус» *(за лучшую мужскую роль)*

Игра - упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации.

<u>Цель теории игр</u> - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам:

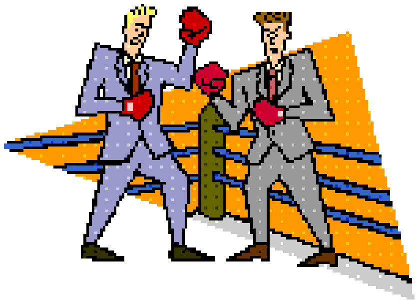
1. Правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации.
2. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

АНТАГОНИЗМ — *(от греч. antahonisma спор, борьба)* противоречие, для которого характерна острая непримиримая борьба враждующих сил, тенденций.

Примеры конфликтных ситуаций:

взаимоотношения покупателя и продавца

конкуренция различных фирм



боевые действия

А также обычные игры

Игроки – заинтересованные стороны в игре.

Партия игры – каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала до конца.

Ход игрока – выбор и осуществление действия производимого одним игроком в условиях точно определенных правилами игры.

Игра состоит из **ходов**, выполняемых игроками одновременно или последовательно

личный

случайный

Ход называется **<u>личным</u>**, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его.

Ход называется **<u>случайным</u>**, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают.

Стратегия игрока называется **оптимальной**, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний

проигрыш, независимо

от того, какие стратегии

применяет противник.

Теория игр имеет свои недостатки:

1. Предположение о полной (“идеальной”) разумности противников.

В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем слабость противника и воспользоваться этой слабостью

Пусть в игре участвуют два игрока A и B

$$\left.\begin{array}{l}\text{выигрыш игрока A} \rightarrow a_{ij},\\ \text{выигрыш игрока B} \rightarrow b_j\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\mathbf{a_{ij} = -\,b_j}}$$

<u>Задача игрока А</u> - максимизировать свой выигрыш.
<u>Задача игрока В</u> – минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Игру можно представить в виде матрицы строки которой - стратегии игрока A, а столбцы – стратегии игрока B.

стратегии игрока B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

стратегии игрока A

Матрица называется ***платежной матрицей****, где элементы этой матрицы это выигрыши игрока A.*

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры

ПРИНЦИП МАКСМИНА:

необходимо выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

Пример.

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Решение:

Найдем наилучшую стратегию игрока А (строки) – это минимальное число в каждой строке матрицы

$$\boxed{\alpha_i = \min a_{ij}, i = \overline{1,m}}$$

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Зная минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i , игрок А выберет ту стратегию, для которой α_i максимально.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \alpha_i \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{\alpha = 7}}$

Величина α – гарантированный выигрыш игрока А и называется ***нижней ценой игры*** (максимином)

Далее необходимо определить наилучшую стратегию игрока *B* (столбцы) – это максимальное число в каждом столбце матрицы

$$\boxed{\beta_j = \max \beta_j,\ j = \overline{1, n}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta_j} \quad \boldsymbol{7} \quad \boldsymbol{9} \quad \boldsymbol{10}$$

Зная максимальные проигрыши при различных стратегиях B_j, игрок B выберет ту стратегию, для которой β_j минимально

$$\boxed{\beta = \min_{j} \max_{i} \beta_j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \boldsymbol{\beta_j} \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{7} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{10} \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\beta = 7}}$$

Игрок B гарантирует себе проигрыш не выше β. Величина β называется ***<u>верхней ценой игры</u>*** (минимаксом)

Для матричной игры всегда справедливо неравенство

$$\boxed{\alpha \le \beta}$$

Если α = β, то ситуация является равновесной. И такая игра называется ***игрой с седловой точкой.***
А пара оптимальных стратегий ($A_{iопт}$, $B_{jопт}$) – ***седловой точкой матрицы.***

Если $\boldsymbol{\alpha < \beta}$, то игра не имеет седловой точки

$$a_{ij} = \alpha = \beta = \mathbf{v},$$

где ***v*** *называется* ***ценой игры*** *и является одновременно минимальным в i-й строке и j-м столбце*

***v* -** решение матричной игры

В примере получаем α = β = 7

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & & & & \boldsymbol{\alpha_i} \\
 & \boxed{7} & 9 & 10 & \underline{\mathbf{7}} \\
\mathbf{A=} & 3 & 4 & 8 & \mathbf{3} \\
 & 7 & 5 & 8 & \mathbf{5} \\
\boldsymbol{\beta_j} & \underline{\mathbf{7}} & \mathbf{9} & \mathbf{10} &
\end{array}
$$

Седловая точка матрицы соответствует элементу $\boldsymbol{a_{11}}$.

Ответ: *цена игры (v) = 7*

1) Если $v > 0$, то игра выгодна для игрока А.
2) Если $v < 0$ - для игрока В.
3) Если $v = 0$ игра справедлива, *т.е. является одинаково выгодной для обоих участников*

Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает:

- игроку A выигрыш не менее α,
- игроку B проигрыш не больше β.

Учитывая что $\alpha < \beta$, целью игрока А будет в увеличении выигрыша, а для игрока В - уменьшение проигрыша.

2.2. Смешанные стратегии

Если в игре ***нет седловой точки*** в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять ***смешанные стратегии***, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Смешанной стратегией игрока называются случайные величины, возможные значения которых являются чистые стратегии.

1) Теорема о максимине. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство

$$\boxed{v_A = v_B}$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $v_A = v_B$*, при* $\alpha \neq \beta$*, и , следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.*

***2) Основная теорема матричных игр*.** Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Цена игры v - средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию

$$\alpha \le \nu \le \beta,$$

т.е. лежит между нижней α и верхней β ценами игры.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Определение. Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются ***активными стратегиями***.

Существуют следующие условия применения смешанных стратегий:

1. Игра без седловой точки.
2. Игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями.
3. Игра повторяется многократно в сходных условиях.
4. При любом ходе ни один из игроков не информирован о стратегии другого игрока.
5. Допускается усреднение результатов игр.

Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2х2

Аналитический метод

Графический метод

Аналитический метод решения игры 2х2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1) оптимальное решение в смешанных стратегиях:
$S_A=|p_1, p_2|$ и $S_B=|q_1, q_2|$

2) вероятности применения (*относительные частоты применения*) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{p_1 + p_2 = 1}$$
$$\mathbf{q_1 + q_2 = 1}$$

В соответствии с теоремой ***об активных стратегиях***, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

1) Если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B - свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры ν равна

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v}$$

2) Если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B - свою чистую активную стратегию B_2, то цена игры ν равна

$$\mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

ЗАДАНИЕ:

Найти, чему равны p_1, p_2, v, если

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

Получаем решение матричной игры:

$$\boxed{p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}}$$

$$\boxed{p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}}$$

Вычислив оптимальное значение **v**, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия

$$\mathbf{a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \quad a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v}$$

$$\boxed{q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}}$$

Пример.

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \beta = \min_j \max_i \beta_j$$

$$\begin{array}{rcc|c} & & & \text{min} \\ A = & \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \\ \text{max} & \mathbf{7} \quad \mathbf{8} & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{array}$$

$\alpha < \beta$, при этом цена игры $\upsilon \in 4; 7]$

Игра не имеет седловой точки, следовательно не решается в чистых стратегиях

Каждый из игроков А и В обладает единственной оптимальной смешанной стратегией $\mathbf{S_A=|p_1,\ p_2|}$ и $\mathbf{S_B=|q_1,\ q_2|}$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-7}{3+4-8-7} = \frac{-3}{-8} = 0{,}375$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{4-8}{(3+4)-(8+7)} = \frac{-4}{-8} = 0{,}5$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = 1 - q_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

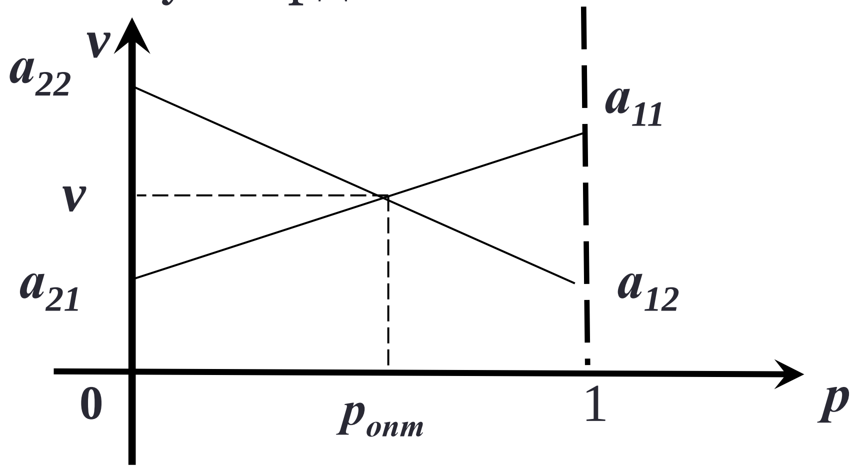
$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{(3 \cdot 4) - (8 \cdot 7)}{3 + 4 - 7 - 8} = \frac{-44}{-8} = 5{,}5$$

Ответ: оптимальной смешанной стратегией игрока А является стратегия $\mathbf{S_A = |0{,}375;\ 0{,}625|}$, а игрока В - $\mathbf{S_B = |0{,}5;\ 0{,}5|}$. Цена игры **v = 5,5**

Графический метод решения игры 2х2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (А):

а) Построим систему координат



б) По оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) По оси ординат – выигрыши игрока А при стратегии A_2, а на прямой p = 1 – выигрыши при стратегии A_1

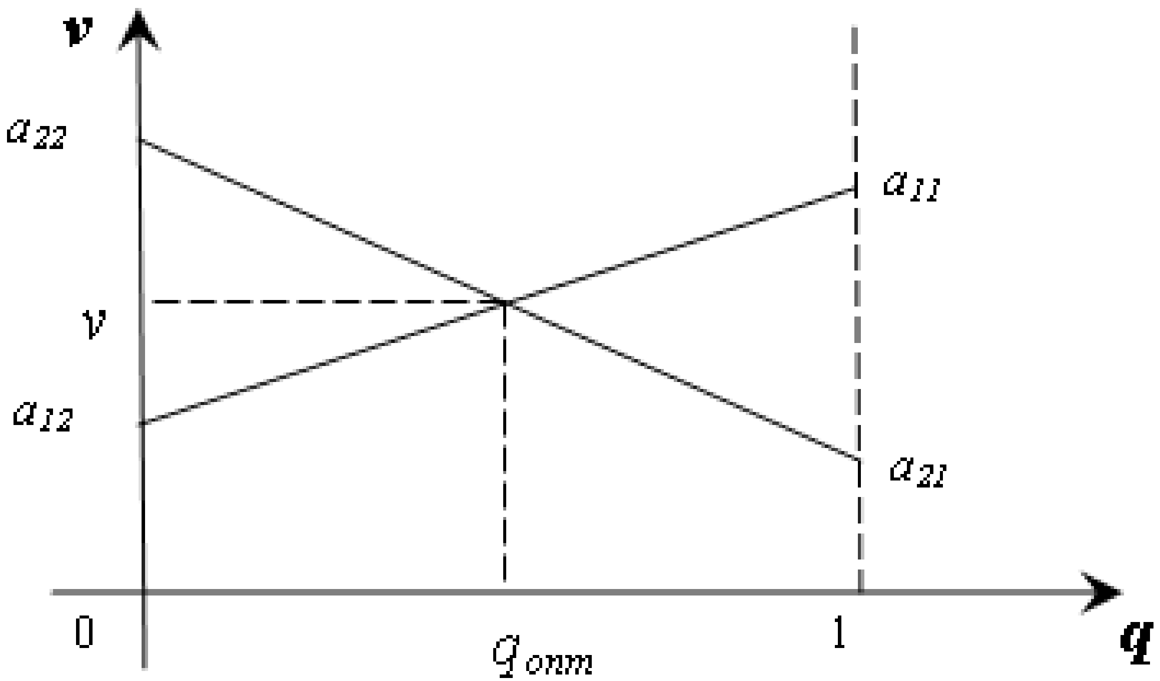
г) Находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры для игрока А ($p_{опт}$, v)

2. Найдем оптимальную стратегию для второго игрока (В):

а) По оси абсцисс откладывается вероятность $q_1 \in [0,1]$, равный 1.

б) По оси ординат – выигрыши игрока В при стратегии B_2, а на прямой q = 1 – выигрыши при стратегии B_1

в) Находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры для игрока В ($q_{опт}$, v)



Пример.

Матричная игра 2х2 задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим методом

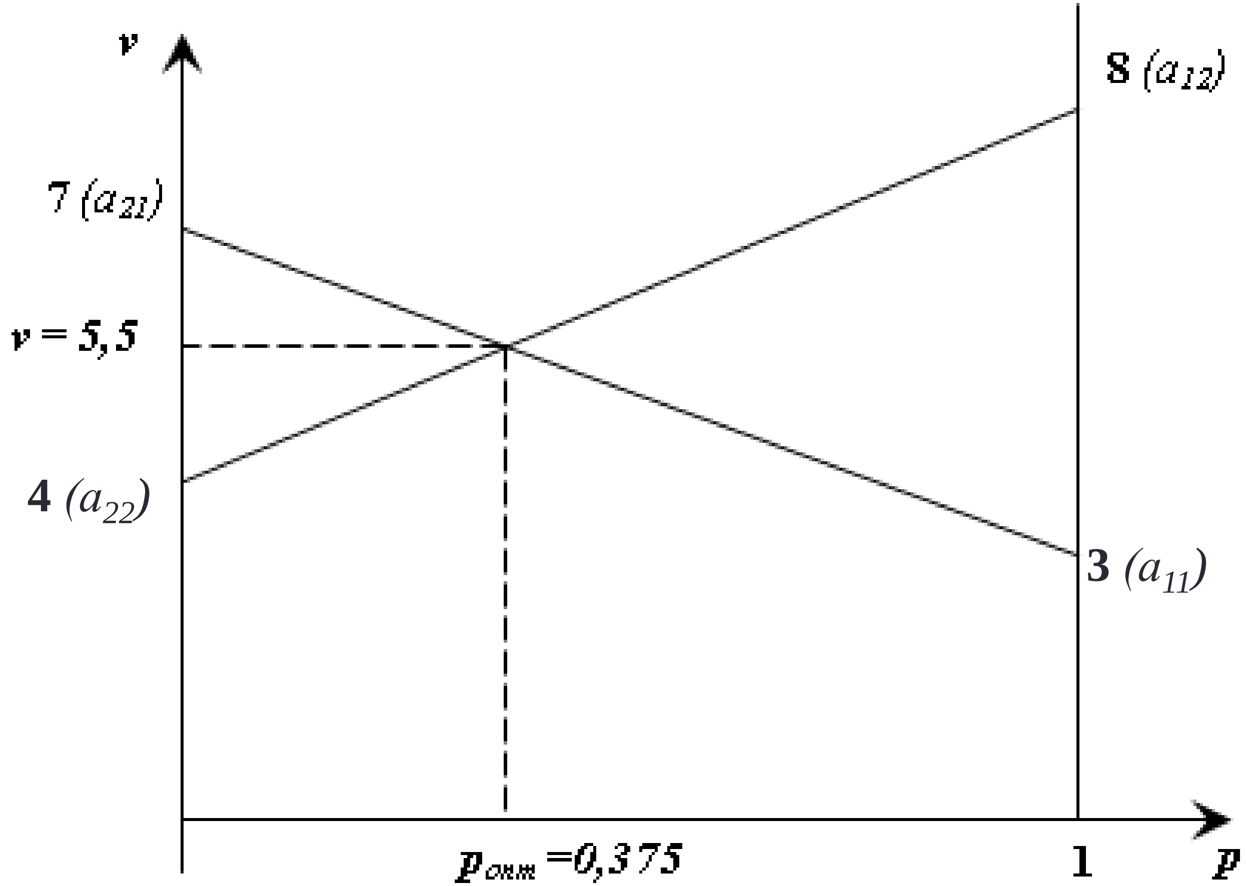
Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = 4, \beta = 7,$$

при этом цена игры $\mathbf{v} \in [4, 7]$

$\alpha < \beta$ - игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.


v
8 (a_{12})
7 (a_{21})
v = 5,5
4 (a_{22})
3 (a_{11})
$p_{опт}$ =0,375
1
p

Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2xn и mx2

Любая конечная игра mxn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит L, где $L = min\ (m, n)$

У игры 2xn или mx2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(min\ (2, n) = min\ (m, 2) = 2)$

Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$\boxed{v = \min_j (a_{1j} p_{опт} + a_{2j}(1 - p_{опт})) = \max_{0 \le p \le 1} \min_j (a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)),\ j = \overline{1, n}}$$

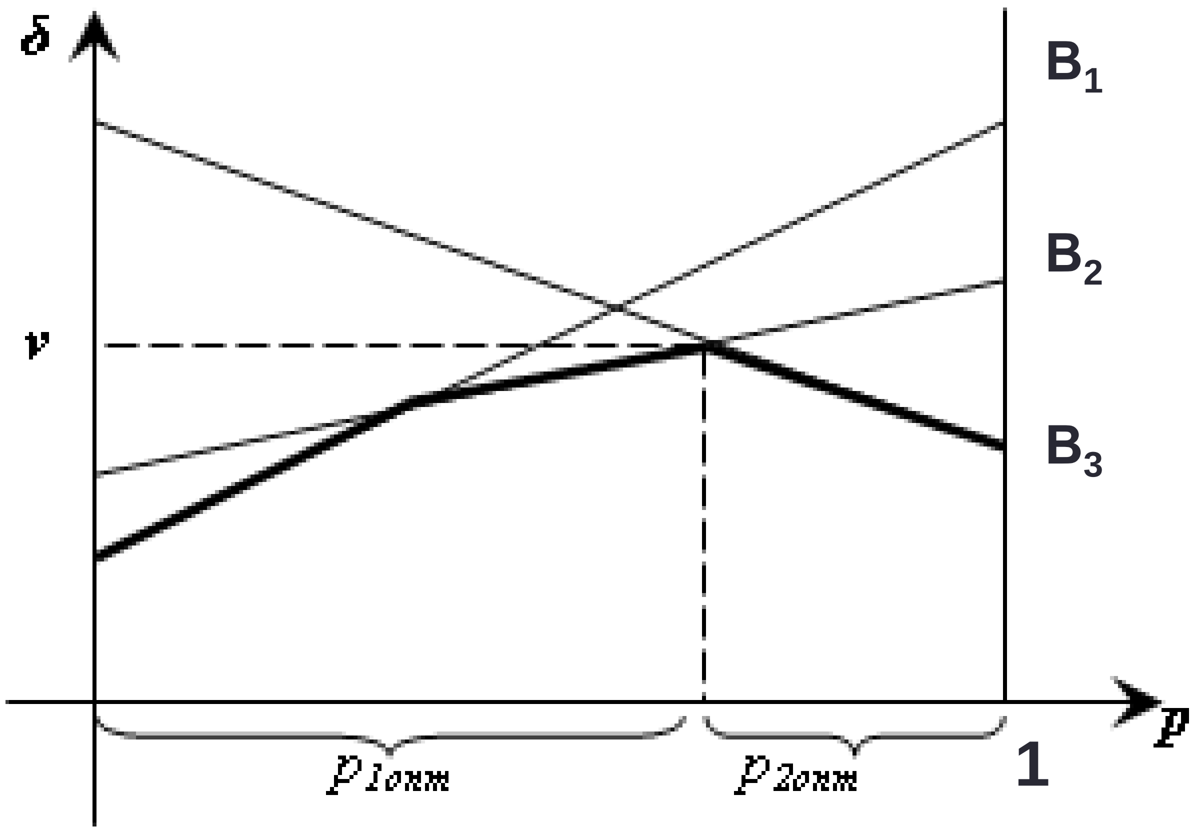
Найти максимум (по p) функции

$$\boxed{\min_{j}(a_{1j}p + a_{2j}(1-p))}$$

Для этого необходимо построить n прямых вида

$$\boxed{\delta_j = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)}$$

на плоскости (p, δ), $p \in [0, 1]$ и путём визуального сравнения выбрать ломаную, огибающую их снизу


δ
B1
B2
v
B3
p
p1опт
p2опт
1

Пример.

Матричная игра *2xn* задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:

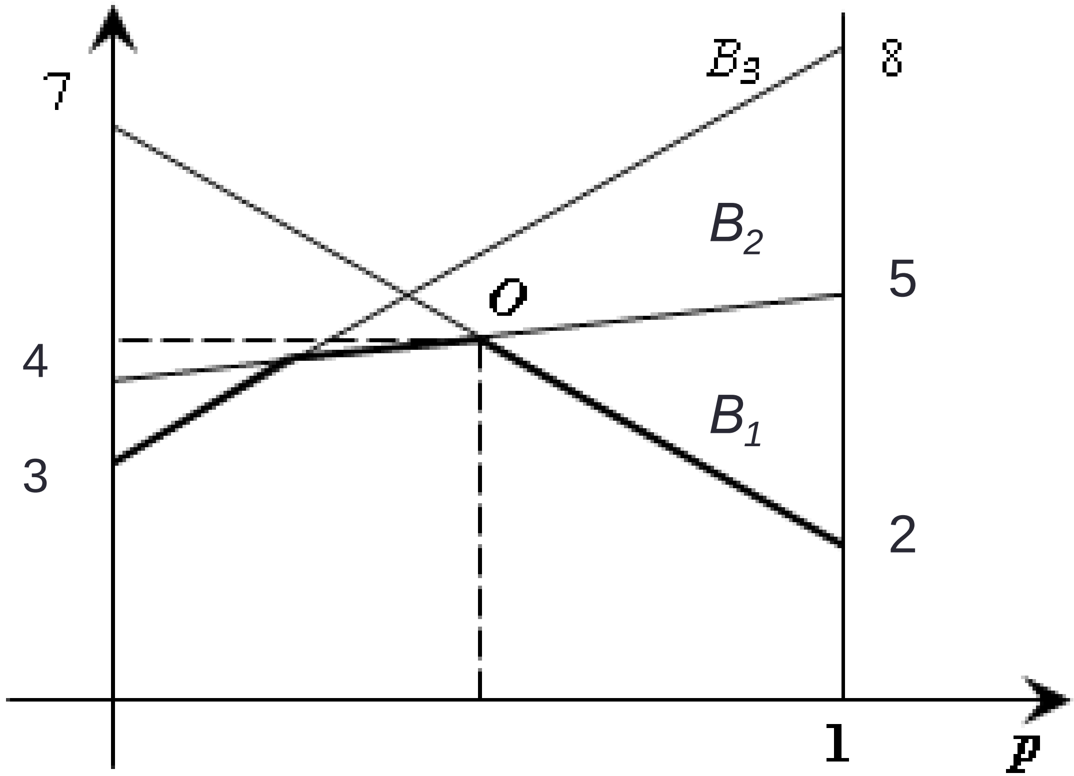
$\alpha = max\,(2, 3) = 3$

$\beta = min\,(7, 5, 8) = 5$

Цена игры $v \in [3, 5]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Строим графическое изображение игры



Находим точку оптимума – $\boldsymbol{O}$. В этой точке пересекаются стратегии B_1 и B_2 игрока В. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0{,}5 \qquad p_2 = 1 - p_1 = 0{,}5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4{,}5-5}{2-5} = 0{,}17 \qquad q_2 = 1 - q_1 = 0{,}83$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = 4{,}5$$

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = |0{,}5;\ 0{,}5|$, $S_B = |0{,}17;\ 0{,}83|$ при цене игры v=4,5.

Решение игры ***mx2*** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока ***B*** и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша, и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример.

Матричная игра *mx2* задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

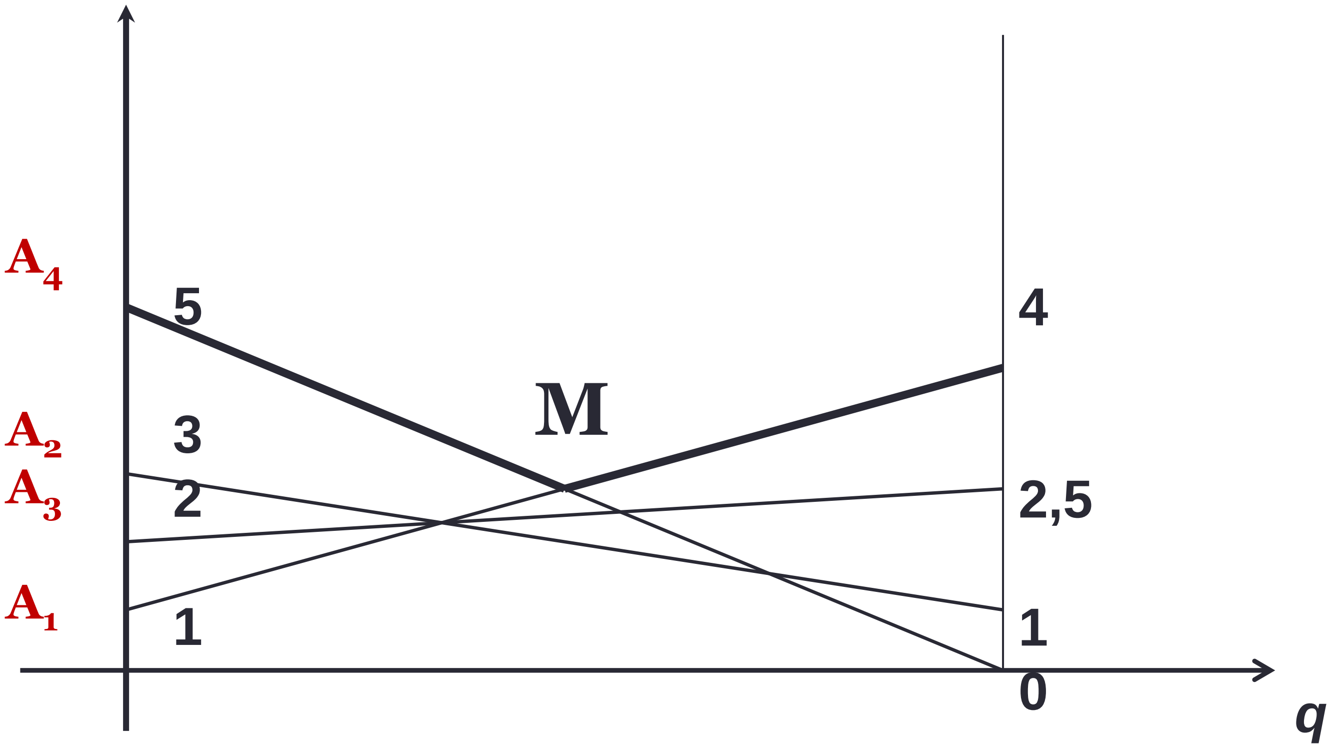
Вычисляя, получим:

$\alpha = max\,(1; 1; 2; 0) = 2$

$\beta = min\,(5; 4) = 4$

Цена игры $v \in [2, 4]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.


A4
5
4
M
A2
3
A3
2
2,5
A1
1
1
0
q

$p1 = 0{,}625$ $p2 = 0{,}375$

$q1 = 0{,}5$ $q2 = 0{,}5$

$v = 2{,}5$

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A=|0{,}625;\ 0{,}375|$, $S_B=|0{,}5;\ 0{,}5|$ при цене игры v=2,5.

Неопределенность – это когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника.

Неопределенность зависит от недостатка информации о внешних условиях, в которых будет приниматься решение и не зависит от действий игрока

Неопределенность может быть следствием многих причин:

- колебание спроса;
- нестабильность экономической ситуации;
- изменение курса валют;
- колебание уровня инфляции;
- неустойчивая биржевая ситуация;
- погода как природное явление.

В таких задачах выбор решения зависит от состояния объективной действительности, называемой ***«природой»***, а математические модели называются ***«игры с природой»***.

Игра, в которой осознанно действует только один из игроков, называется ***игрой с природой.***

«Природа» *– это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в данном конфликте, хотя такую ситуацию конфликтом можно назвать лишь условно.*

Природа может принимать одно из своих возможных состояний и <u>не имеет целью получение выигрыша</u>

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока ***А***, но не являются проигрышами природы ***П***.

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} – выигрыш игрока **А** при стратегии A_i в состоянии природы $П_j$

$$
\begin{array}{c}
\textit{\textbf{выигрыши игрока А}}
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{array}\right|
$$

природа (П)

Матрица еще называется ***матрицей доходности***, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

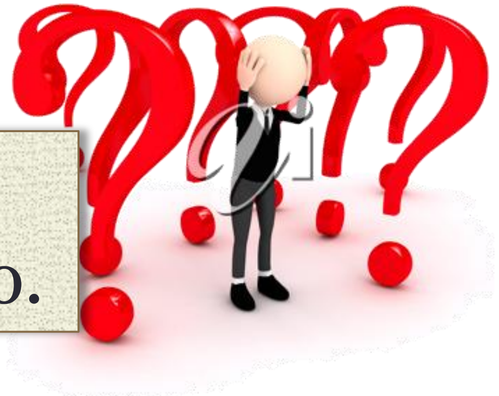
В «играх с природой»

задача выбора оптимальной стратегии для игрока *А* упрощается

задача выбора оптимальной стратегии для игрока *А* осложняется из-за дефицита информации о поведении природы

Различают два вида задач в играх с природой:

1. ***Задачи о принятии решений в условиях неопределенности***, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы
2. ***Задача о принятии решений в условиях риска***, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний



1. Уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью.

2. Массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

3. Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации.

Принятие решений в условиях неопределенности

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если будет принято ***i-е*** решение, а состояние внешней среды соответствует ***j-й*** ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется *j-е* состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$\mathbf{b_j = max(a_{ij}),}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Принимая *i*-е решение, игрок ***A*** рискует получить не $\boldsymbol{b_j}$, а только $\boldsymbol{a_{ij}}$, то есть, если игрок примет *i*-е решение, а в природе реализуется ***j-е*** состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$\boxed{r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}}$$

(*по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется j-е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход* $b_j = \max(a_{ij}), j = 1, 2, \ldots, n$)

$\boldsymbol{a_{ij}}$ – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся i-ых вариантов при наступлении j-ого сценария развития событий

$\boldsymbol{a_{maxj}}$ - значение показателя доходности i-ого варианта стратегии при наступлении j-ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

Матрица рисков (сожалений) отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев.

При решении Задачи о принятии решений в условиях неопределенности для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- критерий Вальда,
- критерий оптимизма,
- критерий пессимизма,
- критерий Сэвиджа,
- критерий Гурвица

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало

большинство критериев.

1) **<u>Критерий Вальда</u>** (*критерий гарантированного результата, максиминный критерий*) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$\boxed{W = \max_{i} \min_{j} a_{ij},}$$

a_{ij} – *элемент матрицы доходности.*

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;
- не допускается никакой риск;
- реализуется лишь малое количество решений.

Пример:

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Вальда.

Решение:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10;12;13) = 13$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

2) **Критерий оптимизма** (*критерий максимакса*) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$\boxed{M = \max_{i} \max_{j} a_{ij},}$$

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию оптимизма (M) является наибольший из показателей эффективности чистых стратегий.

Пример:

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию оптимизма.

Решение:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20;16;18) = 20$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

3) <u>**Критерий пессимизма**</u> предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$\boxed{P = \min_{i} \min_{j} a_{ij},}$$

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	20	15	10
$А_2$	16	12	14
$А_3$	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию пессимизма.

Решение:

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10;12;13) = 10$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

4) **Критерий Сэвиджа** *(критерий минимаксного риска Сэвиджа)* предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из её минимально возможных элементов:

$$\boxed{S = \min_{i} \max_{j} r_{ij} ,}$$

Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.

Критерий Сэвиджа позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое то рассчитывало вначале.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа называется минимальный показатель неэффективности среди показателей неэффективности всех чистых стратегий.

Теорема: Для того чтобы чистая стратегия была безрисковой, т.е. чтобы её показатель неэффективности по критерию Сэвиджа был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы она доминировала каждую из остальных чистых стратегий.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	20	15	10
$А_2$	16	12	14
$А_3$	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа.

Решение:

Применяем формулу $r_{ij} = a_{maxj} - a_{ij}$, построим матрицу рисков.

Матрица рисков

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

$$S = \min_j \max_j r_{ij} = \min(5;6;7) = 5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

5) ***Критерий Гурвица*** *(взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации)* предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$\boxed{H = \max_i \left(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right),}$$

где λ – *коэффициент оптимизма,* $0 \le \lambda \le 1$

Коэффициент λ выражает количественно «меру оптимизма» игрока *А* при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица принимающего решение в схожих ситуациях.

1. Если $\lambda \to 1$, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда
2. Если $\lambda \to 0$, то правило Гурвица приближается к правилу оптимизма

если **λ** коэффициент оптимизма, то ***(λ – 1)*** коэффициент пессимизма

Критерий Гурвица позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица.

$\lambda = 0,5$

Решение:

$$H = \max_i \left(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right)$$

$$H_1 = (0{,}5 \cdot 20) + ((1-0{,}5) \cdot 10) = 10 + 5 = 15$$

$$H_2 = (0{,}5 \cdot 16) + ((1-0{,}5) \cdot 12) = 8 + 6 = 14$$

$$H_3 = (0{,}5 \cdot 18) + ((1-0{,}5) \cdot 13) = 9 + 6{,}5 = 15{,}5$$

$$H = \max_i (15;14;15{,}5) = 15{,}5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

При решении ***Задачи о принятии решений в условиях риска*** различным состояниям природы поставлены в соответствие соответствующие вероятности.

Игрок А принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска

Критерии оптимальности в условиях риска:

- критерий Байеса;
- критерий Лапласа;
- критерий Гермейера.

1) Критерий Байеса относительно выигрышей

Предположим, что игроку A известны не только состояния $\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_n$ в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности $(q_1, q_2, \dots q_n)$ наступления этих состояний, при этом $\sum q_j = 1$.

Это говорит о том, что лицо принимающее решение находится в условиях риска.

Матрицу выигрышей игрока *А* и вероятности состояний природы *П* можно представить в виде общей матрицы:

A =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	**…**	$\boldsymbol{q_n}$

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения

A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{in}
q	q_1	q_2	…	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$\boxed{B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,\ldots, m}$$

Оно означает средне взвешенное выигрышей *i*-ой строки матрицы *A* с весами $(q_1, q_2, \ldots q_n)$.

Критерий Байеса относительно выигрышей

позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$\boxed{B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}}$$

2) Критерий Байеса относительно рисков

Матрицу рисков игрока *A* и вероятности состояний природы *П* можно представить матрицей:

$R =$

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	…	$\boldsymbol{q_n}$

Показателем эффективности стратегии A_i по *критерию Байеса относительно рисков* является математическое ожидание рисков, расположенных в i-ой строке матрицы R.

$$\boxed{B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, i = 1,2,..., m}$$

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B^r = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \right\}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

3) Критерий Лапласа относительно выигрышей

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_j = n^{-1}$$

$$\sum q_j = \sum n^{-1} = 1$$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Имеется игра с природой, в которой игрок А обладает m чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из n своих состояний $П_j$, а матрица выигрышей игрока А задается следующим образом:

A =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1=n^{-1}}$	$\boldsymbol{q_2=n^{-1}}$	…	$\boldsymbol{q_n=n^{-1}}$

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию Лапласа относительно выигрышей* является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии.

$$\boxed{L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1,2,\ldots, m}$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей

предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$L = \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots, m$$

4) Критерий Лапласа относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

R =

$П_j$ / A_i	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1=n^{-1}}$	$\boldsymbol{q_2=n^{-1}}$	…	$\boldsymbol{q_n=n^{-1}}$

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию ***Лапласа относительно рисков*** является среднеарифметическое рисков при этой стратегии.

$$\boxed{L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \; i = 1,2,\ldots, m}$$

Критерий Лапласа относительно рисков

предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$L^{r} = \min_{i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right\}, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Гермейера относительно выигрышей

Гермейер Юрий Борисович (18.07.1918 - 24.06.1975)

– ***П****рофессор, д.т.н.*

– ***О****снователь и первый руководитель отдела Исследования операций Вычислительного Центра РАН*

– ***О****снователь и первый руководитель кафедры Исследования операций МГУ им. М.В.Ломоносова*

Критерий Гермейера относительно выигрышей

Рассмотрим игру с природой размера ($m \geq 2$) и ($n \geq 2$) с матрицей выигрышей A

$A =$	$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…	…
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
	$\mathbf{q_j}$	$\mathbf{q_1}$	$\mathbf{q_2}$	**…**	$\mathbf{q_n}$

По критерию Гермейера (A^G) эффективность чистых стратегий определяется следующим образом:

Выбрав чистую стратегию A_i, игрок A может получить выигрыш a_{ij}, если природа окажется в состоянии $П_j$. Но при этом природа может оказаться в этом состоянии с вероятностью $q_j = p(П_j)$. Поэтому игрок А может получить свой выигрыш (a_{ij}) только с вероятностью q_j.

В связи с этим рассматривается так называемый элемент Гермейера этого выигрыша – $a_{ij}\,q_j$.

Если выигрыш $a_{ij} > 0$, $a_{ij} < 0$ или $a_{ij} = 0$, то элемент Гермейера соответствено

$$\boldsymbol{a_{ij}\, q_j > 0,\ a_{ij}\, q_j < 0 \text{ или } a_{ij}\, q_j = 0.}$$

Если элемент Гермейера $a_{ij}\, q_j$ выигрыша a_{ij} больше элемента $a_{kl}\, q_l$ выигрыша a_{kl}, то выигрыш a_{ij} может быть не больше выигрыша a_{kl}.

Матрица Гермейера состоит из элементов Гермейера и выглядит следующим образом:

	A_i \ Π_j	**Π_1**	**Π_2**	**…**	**Π_n**
	A_1	$a_{11}\ q_1$	$a_{12}\ q_2$	…	$a_{1n}\ q_n$
$A^G =$	A_2	$a_{21}\ q_1$	$a_{22}\ q_2$	…	$a_{2n}\ q_n$
	…	…	…	…	…
	A_m	$a_m\ q_1$	$a_{m2}\ q_2$	…	$a_{mn}\ q_n$
	q_j	***q_1***	***q_2***	**…**	***q_n***

При выборе стратегии игрок *A* предполагает, что природа будет находиться ***в самом неблагоприятном для него состоянии***, при котором элемент Гермейера будет являться самым минимальным среди всех элементов матрицы Гермейера соответствующие выбранной стратегии.

Этот элемент называется ***показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера*** относительно выигрышей:

$$G_i = \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j), i = 1,2,\ldots m$$

Ценой игры в чистых стратегиях по ***критерию Гермейера*** относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей:

$$\boxed{G = \max_{1 \le i \le m} G_i}$$

Так же ***ценой игры*** в чистых стратегиях по критерию Гермейера относительно выигрышей можно назвать максимином матрицы Гермейера относительно выигрышей:

$$\boxed{G = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)}$$

Пример:

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера относительно выигрышей при вероятностях состояний природы
$q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.

Решение:

Строим матрицу Гермейера с элементами $a_{ij}\, q_j$

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

Находим минимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$G_i = \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)$$

$G_1 = \min(4;\ 4{,}5;\ 5) = 4;$

$G_2 = \min(3{,}2;\ 3{,}6;\ 7) = 3{,}2;$

$G_3 = \min(2{,}6;\ 5{,}4;\ 7{,}5) = 2{,}6.$

$$G = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j) = \max(4; 3{,}2; 2{,}6) = 4$$

Ответ: оптимальной стратегией по критерию Гермейера относительно выигрышей является стратегия A_3