

ТЕМА 3.4.

**Комбинированные критерии
принятия решений в играх с
природой**

3.4.1. Критерий Ходжа-Лемана

3.4.2. Критерий Гермейера-Гурвица

Критерий Ходжа-Лемана относительно выигрышей

$A =$	P_j	P_1	P_2	\dots	P_n
	A_i	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
	A_1	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}
	A_2	\dots	\dots	\dots	\dots
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}
q_j	q_1	q_2	\dots	q_n	

Критерий Ходжа-Лемана относительно выигрышей опирается одновременно на критерий Вальда и критерий Байеса.

При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр (λ) достоверности информации о распределении вероятностей состояний природы $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, значение, которого находится в интервале $[0, 1]$.



Если степень достоверности велика, то доминирует критерий Байеса, в противном случае критерий Вальда.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию *Ходжа-Лемана* относительно выигрышей (HL) является:

$$HL_i = \lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

где

$B_i(\mathbf{q})$ – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно выигрышей с вектором $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$B_i = \sum_{j=1}^n q_j a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$$

W_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Вальда, который определяется по формуле:

$$W_i = \min_j a_{ij}$$

При любом показателе $\lambda \in [0, 1]$ доверия игрока A распределению вероятностей $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ состояний природы показатель эффективности стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана (HL_i):

$$HL_i \geq W_i$$

$$HL_i \leq B_i$$

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей:

$$HL = \max_{1 \leq i \leq m} (HL_i) = \max(\lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i)$$

Критерий Ходжа-Лемана применим в следующих случаях:

- ❑ имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться;
- ❑ принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
- ❑ при малом числе реализации допускается некоторый риск.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей при $\lambda = 0,6$ и при вероятностях состояний природы $q_1 = 0,2$; $q_2 = 0,3$; $q_3 = 0,5$.

Критерий Ходжа-Лемана относительно рисков

$$R (HL) =$$

A_i	Π_j	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	$r_{11} q_1$	$r_{12} q_2$...	$r_{1n} q_n$	
A_2	$r_{21} q_1$	$r_{22} q_2$...	$r_{2n} q_n$	
...	
A_m	$r_{m1} q_1$	$r_{m2} q_2$...	$r_{mn} q_n$	
q_j	q_1	q_2	...	q_n	

Критерий Ходжа-Лемана относительно рисков опирается одновременно на критерий Байеса и критерий Сэвиджа.

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков (HL^r) является:

$$HL_i^r = \lambda B_i^r(q) + (1 - \lambda)S_i, i = 1, 2, \dots, m$$

где

$B_i(q)$ – показатель неэффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно рисков с вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$B_i^r = \sum_{j=1}^n q_j r_{ij}$$

S_i – показатель неэффективности стратегии A_i по критерию Сэвиджа с вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$S_i = \max_j r_{ij}$$

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков является минимальное значение среди показателей неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков:

$$HL^r = \min(HL_i^r) = \min(\lambda B_i^r(q) + (1 - \lambda) S_i)$$

Критерии оптимальности чистых стратегий по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей и относительно рисков не эквивалентны.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков при $\lambda = 0,6$ и при вероятностях состояний природы $q_1 = 0,2$; $q_2 = 0,3$; $q_3 = 0,5$.

Критерий Гермейера-Гурвица относительно выигрышей

Данный критерий представляет собой критерий Гурвица относительно матрицы Гермейера.

$A^G =$	A_j	Π_1	Π_2	\dots	Π_n
	A_1	$a_{11} q_1$	$a_{12} q_2$	\dots	$a_{1n} q_n$
	A_2	$a_{21} q_1$	$a_{22} q_2$	\dots	$a_{2n} q_n$
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
	A_m	$a_{m1} q_1$	$a_{m2} q_2$	\dots	$a_{mn} q_n$
	q_j	q_1	q_2	\dots	q_n

При этом если $0 \leq \lambda \leq 1$, то λ это показатель оптимизма игрока A , тогда показателем пессимизма игрока будет $0 \leq (1 - \lambda) \leq 1$.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей (GH) является:

$$GH_i = (1 - \lambda) \cdot G_i + \lambda \cdot M_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

где
 G_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей с вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$G_i = \min_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} q_j)$$

M_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Гурвица, относительно матрицы Гермейера, который определяется по формуле:

$$M_i = \max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} q_j)$$

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей:

$$GH = \max ((1 - \lambda) \cdot G_i + \lambda \cdot M_i), i = 1, 2, \dots, m$$

Пример:

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей при $\lambda = 0,6$ и при вероятностях состояний природы $q_1 = 0,2$; $q_2 = 0,3$; $q_3 = 0,5$.