Тема 3: Игры с природой

3.1. Понятие игры с природой

3.2. Принятие решений в условиях неопределенности

3.3. Принятие решений в условиях риска

При решении ***Задачи о принятии решений в условиях риска*** различным состояниям природы поставлены в соответствие соответствующие вероятности.
Игрок А принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска

Критерии оптимальности в условиях риска:

- критерий Байеса;
- критерий Лапласа;
- критерий максимальной вероятности;
- критерий Гермейера.

1) *Критерий Байеса относительно выигрышей*

Предположим, что игроку *A* из известны не только состояния $П_1, П_2,…П_n$ в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности $(q_1, q_2,…q_n)$ наступления этих состояний, при этом $\sum q_j = 1$.

Это говорит о том, что лицо принимающее решение находится в условиях риска.

Матрицу выигрышей игрока *A* и вероятности состояний природы *П* можно представить в виде общей матрицы:

A =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	**…**	$\boldsymbol{q_n}$

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения

A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{in}
q	q_1	q_2	…	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$\boxed{B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,\ldots, m}$$

Оно означает средне взвешенное выигрышей *i*-ой строки матрицы *A* с весами $(q_1, q_2,\ldots q_n)$.

Критерий Байеса относительно выигрышей

позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$\boxed{B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}}$$

2) Критерий Байеса относительно рисков

Матрицу рисков игрока *A* и вероятности состояний природы *П* можно представить матрицей:

$R =$

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	**…**	$\boldsymbol{q_n}$

Показателем эффективности стратегии A_i по *критерию Байеса относительно рисков* является математическое ожидание рисков, расположенных в *i*-ой строке матрицы *R*.

$$\boxed{B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, i = 1,2,..., m}$$

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B^{r} = \min_{i}\left\{\sum_{j=1}^{n} q_{j} r_{ij}\right\}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

3) Критерий Лапласа относительно выигрышей

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_j = n^{-1}$$

$$\sum q_j = \sum n^{-1} = 1$$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Имеется игра с природой, в которой игрок А обладает m чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из n своих состояний $П_j$, а матрица выигрышей игрока А задается следующим образом:

A =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1=n^{-1}}$	$\boldsymbol{q_2=n^{-1}}$	…	$\boldsymbol{q_n=n^{-1}}$

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию Лапласа относительно выигрышей* является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии.

$$\boxed{L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1,2,..., m}$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей

предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$L = \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots, m$$

4) Критерий Лапласа относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

$R =$

$A_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}
q_j	$q_1=n^{-1}$	$q_2=n^{-1}$	…	$q_n=n^{-1}$

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию ***Лапласа относительно рисков*** является среднеарифметическое рисков при этой стратегии.

$$L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1,2,\ldots, m$$

Критерий Лапласа относительно рисков

предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$L^r = \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots, m$$