

# ТЕМА 3: ИГРЫ С ПРИРОДОЙ



## Тема 3: Игры с природой

3.1. Понятие игры с природой

3.2. Принятие решений в условиях  
неопределенности

3.3. Принятие решений в условиях риска

***Неопределенность*** – это когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника.



**Неопределенность зависит** от недостатка информации о внешних условиях, в которых будет приниматься решение и не зависит от действий игрока

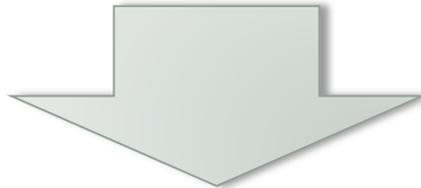
## ***Неопределенность может быть следствием многих причин:***

- колебание спроса;
- нестабильность экономической ситуации;
- изменение курса валют;
- колебание уровня инфляции;
- неустойчивая биржевая ситуация;
- погода как природное явление.



В таких задачах выбор решения зависит от состояния объективной действительности, называемой **«природой»**, а математические модели называются **«игры с природой»**.

Игра, в которой осознанно действует только один из игроков, называется *игрой с природой*.



*«Природа» – это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в данном конфликте, хотя такую ситуацию конфликтом можно назвать лишь условно.*

***Природа может  
принимать одно из своих  
возможных состояний и не  
имеет целью получение  
выигрыша***

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока  $A$ , но не являются проигрышами природы  $\Pi$ .

Каждый элемент платежной матрицы  $a_{ij}$  — выигрыш игрока  $A$  при стратегии  $A_i$  в состоянии природы  $\Pi_j$

<i>выигрыши игрока A</i>	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$
	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$
	<i>природа (Π)</i>			

Матрица еще называется **матрицей доходности**, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

В «играх с природой»

```
graph TD; A[В «играх с природой»] --> B[задача выбора оптимальной стратегии для игрока А упрощается]; A --> C[задача выбора оптимальной стратегии для игрока А осложняется из-за дефицита информации о поведении природы];
```

задача выбора  
оптимальной  
стратегии для игрока  
А упрощается

задача выбора  
оптимальной  
стратегии для игрока  
А осложняется из-за  
дефицита  
информации о  
поведении природы

## Различают два вида задач в играх с природой:

1. Задачи о принятии решений в условиях неопределенности, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы

2. Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний

1. Уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью.
2. Массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.
3. Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации.



## 3.2. Принятие решений в условиях неопределенности

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами

$$i = 1, 2, \dots, m$$


Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Если будет принято  $i$ -е решение,  
а состояние внешней среды  
соответствует  $j$ -й ситуации, то  
лицо, принимающее решение,  
получит доход

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется  $j$ -е состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$\mathbf{b}_j = \max_{i=1, 2, \dots, n}(\mathbf{a}_{ij}),$$

Принимая  $i$ -е решение, игрок  $A$  рискует получить не  $b_j$ , а только  $a_{ij}$ , то есть, если игрок примет  $i$ -е решение, а в природе реализуется  $j$ -е состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

*(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется  $j$ -е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход  $b_j = \max(a_{ij}), j = 1, 2, \dots, n$ )*

$a_{ij}$  – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся  $i$ -ых вариантов при наступлении  $j$ -ого сценария развития событий

$a_{\max j}$  - значение показателя доходности  $i$ -ого варианта стратегии при наступлении  $j$ -ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

## ***Матрица рисков (сожалений)***

отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев.

*При решении Задачи о принятии решений в условиях неопределенности* для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- критерий Вальда,
- критерий оптимизма,
- критерий пессимизма,
- критерий Сэвиджа,
- критерий Гурвица

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало большинство критериев.

1) **Критерий Вальда** (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$W = \max_i \min_j a_{ij},$$

$a_{ij}$  – элемент матрицы доходности.

**Критерий Вальда** предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

*Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.*

2) **Критерий оптимизма** (*критерий максима*) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$M = \max_i \max_j a_{ij},$$

**Критерий оптимизма** используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

*Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.*

3) **Критерий пессимизма** предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j a_{ij},$$

**Критерий пессимизма** предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

*При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.*

4) **Критерий Сэвиджа** (критерий минимаксного риска Сэвиджа) предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

*Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.*

**Критерий Сэвиджа** позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

*Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое оно рассчитывало вначале.*

5) **Критерий Гурвица** (*взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации*) предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i \lambda \cdot \max_j a_{ij} + 1 - \lambda \cdot \min_j a_{ij} ,$$

где  $\lambda$  – коэффициент оптимизма,  $0 \leq \lambda \leq 1$

1. Если  $\lambda \rightarrow 1$ , то правило Гурвица приближается к правилу Вальда
2. Если  $\lambda \rightarrow 0$ , то правило Гурвица приближается к правилу оптимизма

**Критерий Гурвица** позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

**Критерий Гурвица** ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма

## Правило максимизации ожидаемого дохода.

Доход, получаемый при принятии  $i$ -го решения, является случайной величиной  $A_i$  с рядом распределения

$A_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{in}$
$p$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Ожидаемый доход при принятии  $i$ -го решения оценивается математическим ожиданием  $MA_i$  соответствующей случайной величины  $A_i$ . Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, приносящее максимальный ожидаемый доход

$$MA_{i_{opt}} = \max MA_i = \max \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \right)$$

### Правило минимизации ожидаемых сожалений.

Сожаления при реализации  $i$ -го решения представляются случайной величиной  $R_i$  с рядом распределения

$R_i$	$r_{i1}$	$r_{i2}$	...	$r_{in}$
$p$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Ожидаемые сожаления оцениваются математическим ожиданием  $MR_i$  соответствующей случайной величины  $R_i$ .

Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, влекущее минимальные ожидаемые сожаления

$$MR_{i_{opt}} = \min MR_i = \min \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} p_j \right)$$