2.5. Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2xn и mx2

Любая конечная игра mxn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит L, где $L = min\ (m, n)$

У игры 2xn или mx2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(min\ (2, n) = min\ (m, 2) = 2)$

Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$\boxed{v = \min_j (a_{1j} p_{onm} + a_{2j}(1 - p_{onm})) = \max_{0 \le p \le 1} \min_j (a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)),\ j = \overline{1, n}}$$

Е.В. Яроцкая, к.э.н., доцент кафедры экономики ТПУ

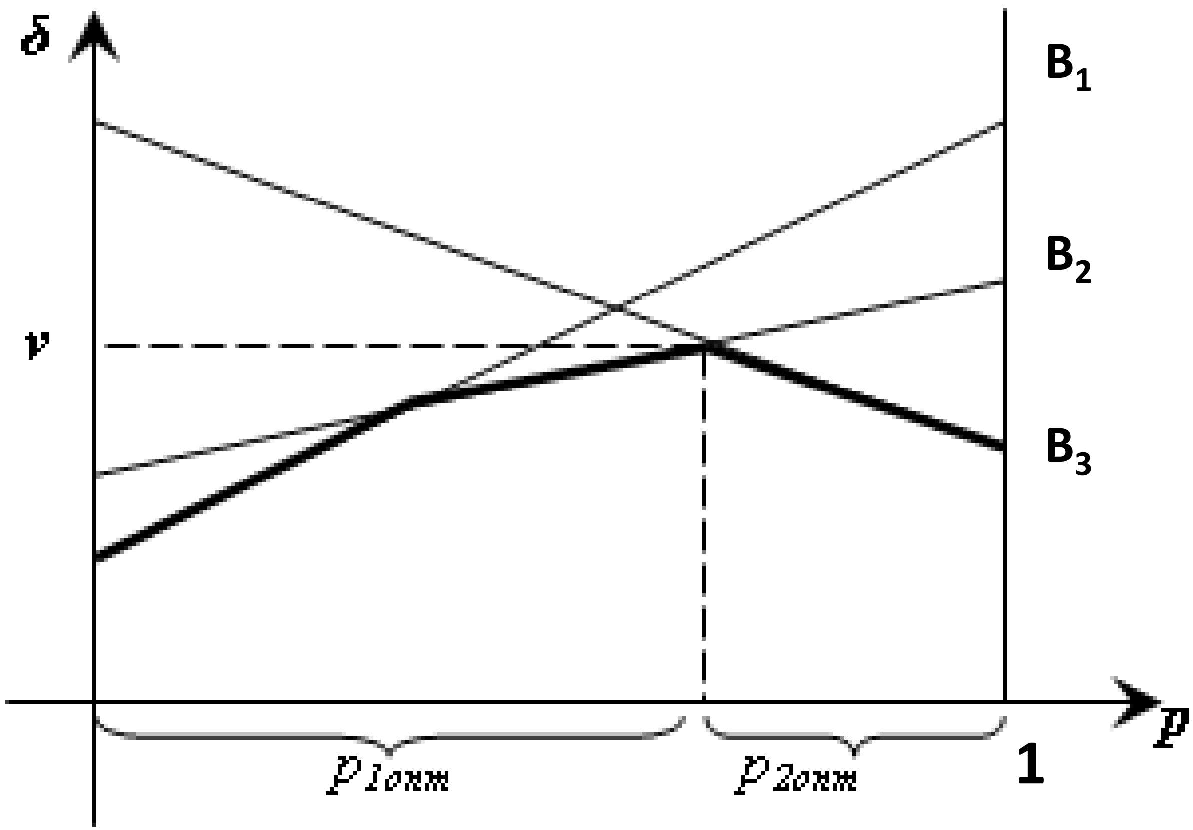
Найти максимум (по *p*) функции

$$\min_j (a_{1j} p + a_{2j}(1 - p))$$

Для этого необходимо построить *n* прямых вида

$$\delta_j = a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)$$

на плоскости (*p*, *δ*), $p \in [0, 1]$ и путём визуального сравнения выбрать ломаную, огибающую их снизу


δ
B1
B2
v
B3
p
p1опт
p2опт
1

Пример.

Матричная игра *2xn* задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \qquad \boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:

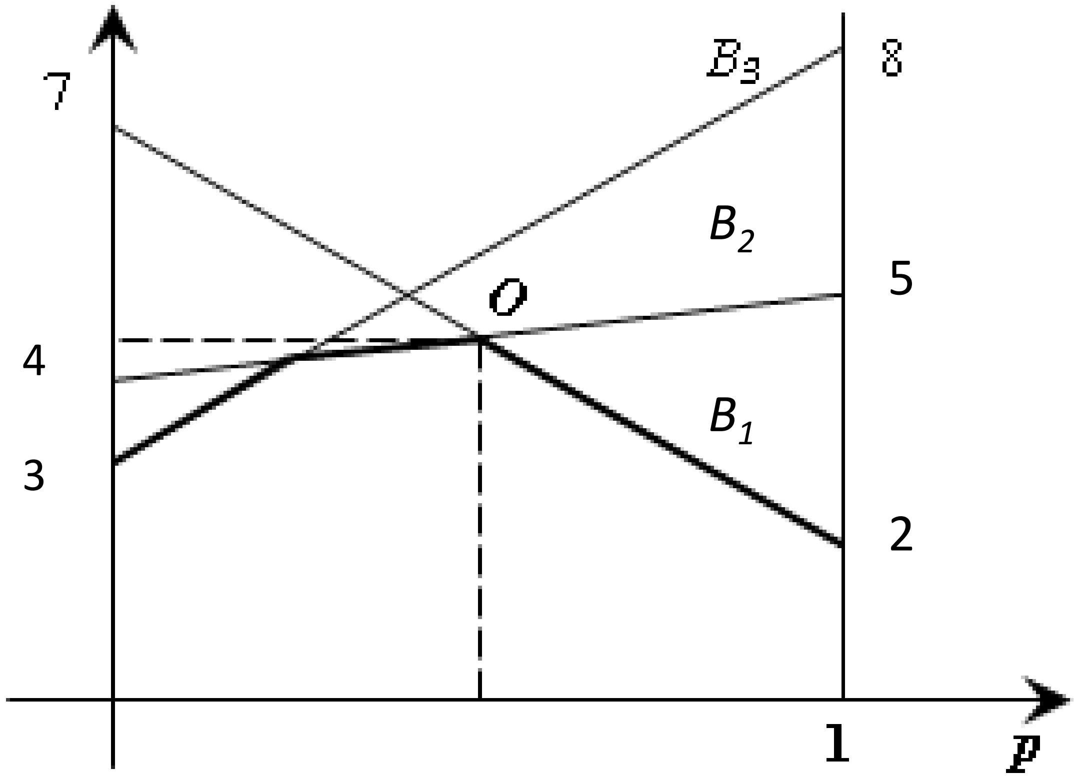
α = max (2, 3) = 3

β = min (7, 5, 8) = 5

Цена игры $v \in [3, 5]$.

Так как *α < β*, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Строим графическое изображение игры



Находим точку оптимума – $\boldsymbol{O}$. В этой точке пересекаются стратегии B_1 и B_2 игрока В. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0,5 \qquad p_2 = 1 - p_1 = 0,5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4,5-5}{2-5} = 0,17 \qquad q_2 = 1 - q_1 = 0,83$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = 4,5$$

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков S_A=|0,5; 0,5|, S_B=|0,17; 0,83| при цене игры v=4,5.

Решение игры ***mx2*** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока ***B*** и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша, и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример.

Матричная игра *mx2* задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим и аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \qquad \boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

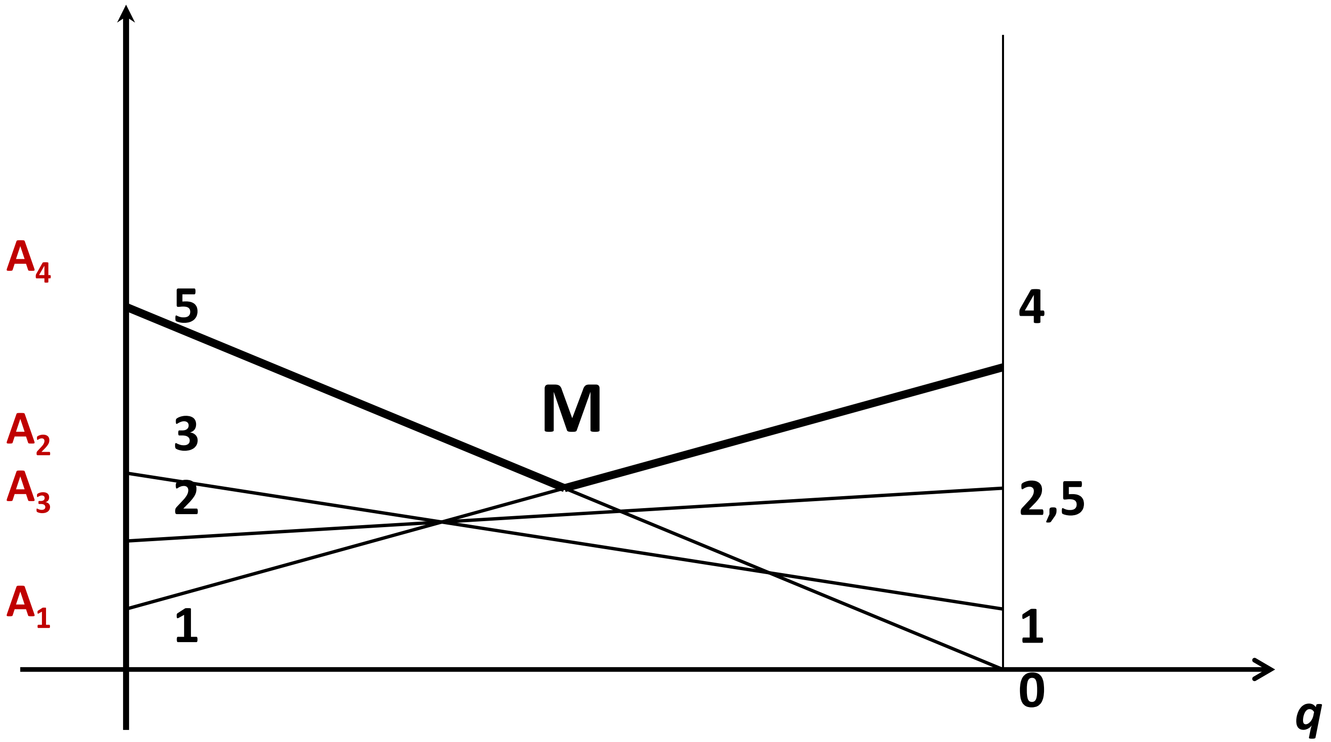
Вычисляя, получим:

$\alpha = max\ (1; 1; 2; 0) = 2$

$\beta = min\ (5; 4) = 4$

Цена игры $v \in [2, 4]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.


A4
5
4
M
A2
3
A3
2
2,5
A1
1
1
0
q

$p1 = 0,625$ $p2 = 0,375$

$q1 = 0,5$ $q2 = 0,5$

$v = 2,5$

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A=|0,625;\ 0,375|$, $S_B=|0,5;\ 0,5|$ при цене игры v=2,5.