2.4. Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2х2

Аналитический метод

Графический метод

Аналитический метод решения игры 2х2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1) оптимальное решение в смешанных стратегиях: $\mathbf{S_A=|p_1, p_2|}$ и $\mathbf{S_B=|q_1, q_2|}$
2) вероятности применения (*относительные частоты применения*) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{p_1 + p_2 = 1}$$
$$\mathbf{q_1 + q_2 = 1}$$

В соответствии с теоремой ***об активных стратегиях***, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

1) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В - свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры ν равна

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v}$$

2) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В - свою чистую активную стратегию B_2, то цена игры ν равна

$$\mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

ЗАДАНИЕ:

Найти, чему равны p_1, p_2, v, если

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

Получаем решение матричной игры:

$$\boxed{p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}}$$

$$\boxed{p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}}$$

Вычислив оптимальное значение **v**, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия

$$\mathbf{a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \quad a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v}$$

$$\boxed{q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}}$$

Пример.

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \beta = \min_j \max_i \beta_j$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \textit{min} \\ A = & \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{4} \end{array} \\ \textit{max} & \begin{array}{cc} \boldsymbol{7} & \boldsymbol{8} \end{array} & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{array}$$

$\alpha < \beta$, при этом цена игры $\upsilon \in 4; 7]$

Игра не имеет седловой точки, следовательно не решается в чистых стратегиях

Каждый из игроков A и B обладает единственной оптимальной смешанной стратегией $\mathbf{S_A=|p_1, p_2|}$ и $\mathbf{S_B=|q_1, q_2|}$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-7}{3+4-8-7} = \frac{-3}{-8} = 0{,}375$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{4-8}{(3+4)-(8+7)} = \frac{-4}{-8} = 0{,}5$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = 1 - q_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

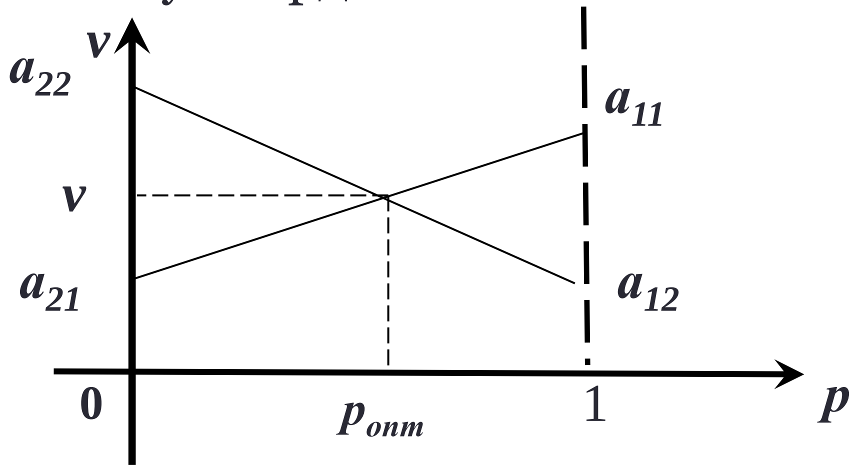
$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{(3 \cdot 4) - (8 \cdot 7)}{3 + 4 - 7 - 8} = \frac{-44}{-8} = 5{,}5$$

Ответ: оптимальной смешанной стратегией игрока А является стратегия $\mathbf{S_A = |0{,}375;\ 0{,}625|}$, а игрока В - $\mathbf{S_B = |0{,}5;\ 0{,}5|}$. Цена игры $\mathbf{v = 5{,}5}$

Графический метод решения игры 2х2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (А):

а) Построим систему координат



б) По оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) По оси ординат – выигрыши игрока А при стратегии A_2, а на прямой p = 1 – выигрыши при стратегии A_1

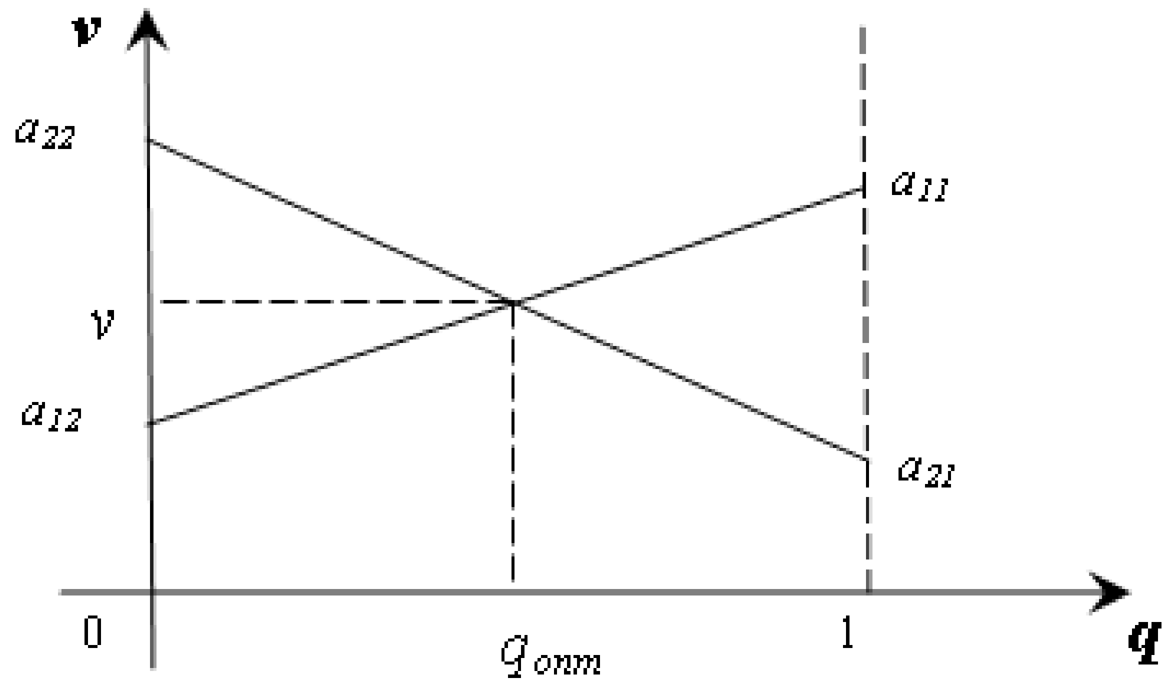
г) Находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры для игрока А ($p_{опт}$, v)

2. Найдем оптимальную стратегию для второго игрока (В):

а) По оси абсцисс откладывается вероятность $q_1 \in [0,1]$, равный 1.

б) По оси ординат – выигрыши игрока В при стратегии B_2, а на прямой q = 1 – выигрыши при стратегии B_1

в) Находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры для игрока В ($q_{опт}$, v)



Пример.

Матричная игра 2х2 задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим методом

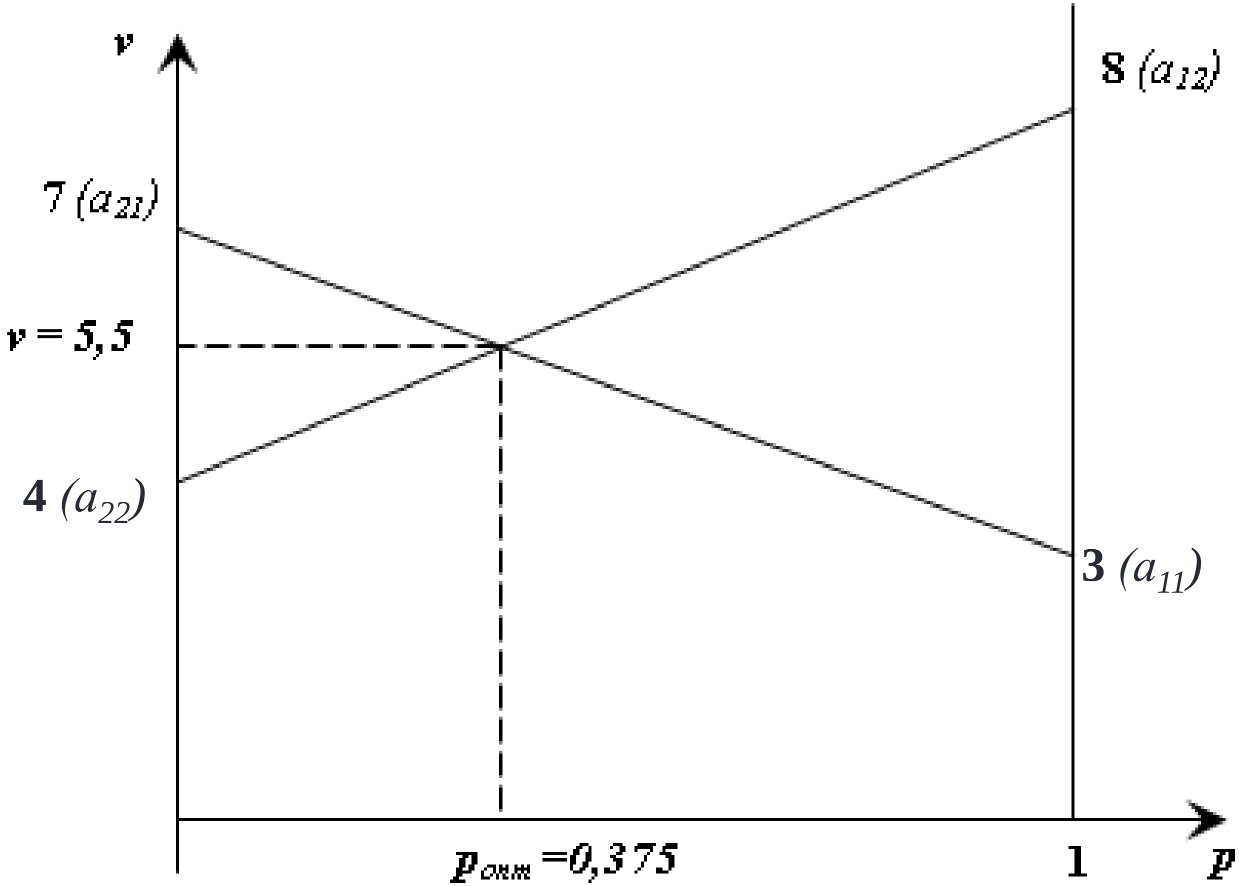
Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boldsymbol{\alpha = 4, \beta = 7,}$$

при этом цена игры $\mathbf{v} \in [4, 7]$

$\alpha < \beta$ - игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.


v
8 (a_{12})
7 (a_{21})
v = 5,5
4 (a_{22})
3 (a_{11})
$p_{опт}$ =0,375
1
p