2.2. Смешанные стратегии

Если в игре ***нет седловой точки*** в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять ***смешанные стратегии***, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Смешанной стратегией игрока называются случайные величины, возможные значения которых являются чистые стратегии.

Каждая смешанная стратегия ***P*** игрока ***A*** полностью определяется вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, с которыми игрок А выбирает соответствующие чистые стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Обозначим множество смешанных стратегий игроков А и В соответственно:

$$\mathbf{S_A=|p_1, p_2, \ldots, p_m|,}$$

$$\mathbf{S_B=|q_1, q_2, \ldots, q_n|,}$$

где p_i - *вероятность применения игроком А чистой стратегии* A_i

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

q_j - *вероятность применения игроком В чистой стратегии* B_j;

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A=|p_1, p_2, \ldots, p_m|$, а игрок B смешанную стратегию $S_B=|q_1, q_2, \ldots, q_n|$, то средний выигрыш игрока A определяется соотношением

$$\boxed{H_A(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j}$$

Ожидаемый проигрыш игрока B равен такой же величине.

Формируя свою стратегию SA в антагонистической игре, игрок A в соответствии с принципом максимина должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т.е. такую стратегию, которая обеспечивает

$$\boxed{\max_i \ \min_j \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i \cdot q_j = v_A.}$$

Для игрока *B*:

$$\boxed{\min_j \ \max_i \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i \cdot q_j = v_B}$$

1) Теорема о максимине. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство

$$\boxed{\nu_A = \nu_B}$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая vA=vB, при α ≠ β, и , следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

2) Основная теорема матричных игр. Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Цена игры v - средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию

$$\alpha \le \nu \le \beta,$$

т.е. лежит между нижней α и верхней β ценами игры.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Определение. Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются ***активными стратегиями***.

***Теорема об активных стратегиях*.** Если один из участников матричной игры G (mxn), придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то это обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, равный цене игры v, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных, причем число активных стратегий каждого игрока, входящих в их оптимальные смешанные стратегии, не превосходит L, где $L = min(m, n)$.

Существуют следующие условия применения смешанных стратегий:

1. Игра без седловой точки.
2. Игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями.
3. Игра повторяется многократно в сходных условиях.
4. При любом ходе ни один из игроков не информирован о стратегии другого игрока.
5. Допускается усреднение результатов игр.

Пример.

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,8 \\ 1 & 0,75 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Смешанные стратегии для игроков *A* и *B* соответственно:

P = (0,37; 0,62), Q = (0,25; 0; 0,75)

Определить выигрыши игрока А в ситуации (P; Q), (P; B_1), (P; B_2), (P; B_3)

Решение:

Выигрыш игрока А в игровой ситуации ***(P; Q)*** определяется по формуле

$$\boxed{H_A(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j}$$

При m = 2, n = 3,

$p_1 = 0{,}37$; $p_2 = 0{,}62$;

$q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0$; $q_3 = 0{,}75$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j$$

$p_1 = 0{,}37;\ p_2 = 0{,}62;$
$q_1 = 0{,}25;\ q_2 = 0;\ q_3 = 0{,}75$

$$H_A(P, Q) = p_1(a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3) + p_2(a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3) =$$

$$= 0{,}37 \cdot ((0 \cdot 0{,}25) + (0{,}5 \cdot 0) + (0{,}8 \cdot 0{,}75)) + 0{,}62 \cdot ((1 \cdot 0{,}25) + (0{,}75 \cdot 0) + (0{,}5 \cdot 0{,}75))$$

$$= 0{,}222 + 0{,}39 = 0{,}612$$

$$\mathbf{H_A(P, Q) = 0{,}612}$$

$$H(P;B_1) = \sum_{i=1}^{2} a_{i1} p_i = (0 \cdot 0{,}37) + (1 \cdot 0{,}62) = 0{,}62$$

$$H(P;B_2) = \sum_{i=1}^{2} a_{i2} p_i = (0{,}5 \cdot 0{,}37) + (0{,}75 \cdot 0{,}62) = 0{,}185 + 0{,}465 = 0{,}65$$

$$H(P;B_3) = \sum_{i=1}^{2} a_{i3} p_i = (0{,}8 \cdot 0{,}37) + (0{,}5 \cdot 0{,}62) = 0{,}296 + 0{,}31 = 0{,}606$$

Ответ: *выигрыш игрока А в ситуациях*
$H(P;Q) = 0{,}612$
$H(P;B_1) = 0{,}62$; $H(P;B_2) = 0{,}65$; $H(P;B_3) = 0{,}606$

2.3. Упрощение матричной игры

Для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путем исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий

Упрощение матрицы происходит согласно следующим правилам:

1. Если в платежной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими и одна из них исключается из матрицы.

$$\begin{array}{r} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \end{array} \begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{6} & \cancel{0} \\ 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Упрощение матрицы происходит согласно следующим правилам:

2. Если в платежной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока А, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется доминируемой (заведомо невыгодной) и исключается из матрицы.

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Упрощение матрицы происходит согласно следующим правилам:

3. Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_i игрока B не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_i называется доминируемой (заведомо невыгодной) и исключается из матрицы.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Решение матричной игры ***не изменится***, если из платежной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид. Необходимо провести процедуру уменьшения её размерности.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение:

Сначала найдём верхнюю и нижнюю цену игры и определим, имеет ли игра седловую точку.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:
$\alpha = max\ (5, 6, 8, 5, 8) = 8$
$\beta = min\ (12, 10, 10, 12, 10) = 10$
При этом цена игры v $\in [8, 10]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях

Упростим матричную игру.

<u>Стратегии игрока А.</u> Необходимо сравнить каждую последующую строку с предыдущей поэлементно.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ 9 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Все соответствующие элементы первой строки меньше соответствующих элементов второй строки, значит, первую строку исключаем из матрицы

Соответствующие элементы второй строки меньше или равны соответствующих элементов третьей строки, поэтому исключаем вторую стратегию игрока А как заведомо невыгодную

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Все элементы четвертой строки меньше элементов третьей строки, поэтому четвертая строка исключается из матрицы.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Сравнивая третью и пятую строку, видим, что соответствующие элементы этих строк не больше друг друга. Следовательно, из них нет заведомо невыгодных стратегий.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Сравнивая третью и пятую строку, видим, что соответствующие элементы этих строк не больше друг друга. Следовательно, из них нет заведомо невыгодных стратегий.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

<u>Стратегии игрока В.</u> Платежная матрица имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Сравнивается каждый последующий столбец с предыдущим поэлементно.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Существуют дублирующие стратегий игрока *B* – это третья и пятая стратегии. Любую из них исключаем из игры.

При сравнении первого и второго столбца – заведомо невыгодных стратегий нет.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

При сравнении первого и четвертого столбца видно, что соответствующие элементы первого столбца больше и равны соответствующих элементов четвертого столбца, следовательно, первая стратегия заведомо невыгодна.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

При сравнении второго столбца с четвертым - доминируемых стратегий нет.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

При сравнении соответствующих элементов второго столбца с пятым - пятая стратегия является доминируемой

Получается платежная матрица игры 2х2:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$$

Верхняя и нижняя цена игры осталась неизменной.

Ответ: $\alpha = 8$, $\beta = 10$, цена игры $\upsilon \in [8, 10]$.