ТЕМА 2:

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Е.В. Яроцкая, к.э.н., доцент кафедры экономики ТПУ

Тема 2: Матричные игры

2.1. Равновесная ситуация
2.2. Смешанные стратегии
2.3. Упрощение матричной игры
2.4. Графический метод решения матричных игр в смешанных стратегиях
2.5. Решение игр 2xn и mx2

Е.В. Яроцкая, к.э.н., доцент кафедры экономики ТПУ

Пусть в игре участвуют два игрока A и B

$$\left.\begin{array}{l}\text{выигрыш игрока A} \rightarrow a_{ij},\\ \text{выигрыш игрока B} \rightarrow b_j\end{array}\right\} \qquad \boxed{\mathbf{a_{ij} = -\,b_j}}$$

<u>**Задача игрока A**</u> - максимизировать свой выигрыш.
<u>**Задача игрока B**</u> – минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Игру можно представить в виде матрицы строки которой - стратегии игрока A, а столбцы – стратегии игрока B.

стратегии игрока B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

стратегии игрока A

Матрица называется ***платежной матрицей****, где элементы этой матрицы это выигрыши игрока A.*

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры

ПРИНЦИП МАКСМИНА:

необходимо выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

Пример.

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Решение:

Найдем наилучшую стратегию игрока А (строки) – это минимальное число в каждой строке матрицы

$$\boxed{\alpha_i = \min a_{ij}, i = \overline{1, m}}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \alpha_i \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

Зная минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i, игрок А выберет ту стратегию, для которой α_i максимально.

$$\boxed{\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij}}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \alpha_i \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{\alpha = 7}}$$

Величина α – гарантированный выигрыш игрока А и называется ***<u>нижней ценой игры</u>*** (максимином)

Далее необходимо определить наилучшую стратегию игрока *B* (столбцы) – это максимальное число в каждом столбце матрицы

$$\boxed{\beta_j = \max \beta_j, \ j = \overline{1, n}}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}= \\ \boldsymbol{\beta_j} \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{\mathit{7}} & \mathbf{\mathit{9}} & \mathbf{\mathit{10}} \end{matrix} \end{array}$$

Зная максимальные проигрыши при различных стратегиях B_j, игрок B выберет ту стратегию, для которой β_j минимально

$$\boxed{\beta = \min_{j} \max_{i} \beta_j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta_j} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{9} \quad \mathbf{10}$$

β = 7

Игрок B гарантирует себе проигрыш не выше β. Величина β называется ***верхней ценой игры*** (минимаксом)

Для матричной игры всегда справедливо неравенство

$$\boxed{\alpha \le \beta}$$

Если α = β, то ситуация является равновесной. И такая игра называется ***игрой с седловой точкой.***
А пара оптимальных стратегий (A_{ionm}, B_{jonm}) – ***седловой точкой матрицы.***

Если $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, то игра не имеет седловой точки

$$\boxed{a_{ij} = \alpha = \beta = \mathbf{v},}$$

*где **v** называется **ценой игры** и является одновременно минимальным в i-й строке и j-м столбце*

***v* -** решение матричной игры

В примере получаем $\alpha = \beta = 7$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & & & & \alpha_i \\
\hline
 & \boxed{7} & 9 & 10 & \underline{\mathbf{7}} \\
A= & 3 & 4 & 8 & \mathbf{3} \\
 & 7 & 5 & 8 & \mathbf{5} \\
\hline
\beta_j & \underline{\mathbf{7}} & \mathbf{9} & \mathbf{10} &
\end{array}
$$

Седловая точка матрицы соответствует элементу $\boldsymbol{a_{11}}$.

Ответ: *цена игры (v) = 7*

1) Если $v > 0$, то игра выгодна для игрока А.

2) Если $v < 0$ - для игрока В.

3) Если $v = 0$ игра справедлива, *т.е. является одинаково выгодной для обоих участников*

Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает:

- игроку А выигрыш не менее α,
- игроку В проигрыш не больше β.

Учитывая что $\alpha < \beta$, целью игрока А будет в увеличении выигрыша, а для игрока В - уменьшение проигрыша.