ТЕМА 3:

ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Е.В. Яроцкая, к.э.н., доцент кафедры экономики ТПУ

Тема 3: Игровые методы и модели

3.1. Основы теории игр

3.2. Классификация видов игр

3.3. Игры с «природой»

3.3.1. Игровые модели в условиях неопределенности

3.3.2. Игровые модели в условиях риска

Е.В. Яроцкая, к.э.н., доцент кафедры экономики ТПУ

Теория игр – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

Теория игр опирается на предположение о том, что независимо от цели игры и ее обстоятельств найдется стратегия, которая позволит добиться успеха.

это всегда происходит по определенным правилам, но иногда их трудно распознать

Жозеф Луи Франсуа Бертран

французский математик

11.03.1822 – 05.04.1900

1. Профессор Политехнической школы и Колледжа Франции, член Парижской академии наук.
2. Работал в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятности и термодинамики.
3. Дал математическую трактовку стратегии в играх в курсе теории вероятностей «Calcul des probabilités» в 1889 г.

Джон фон Нейман

венгро-американский математик еврейского происхождения

03.12.1903 – 08.02.1957

1)Профессор Принстонского университета США.
2) Сотрудник RAND Corporation (*американский стратегический центр для обеспечения национальной безопасности страны*).
3)Внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения.
2) Важную роль в экономике сыграла теория игр, разработанная Нейманом и О. Моргенштерном

Монография является классическим, основополагающим трудом по теории игр. Большинство понятий и идей, разрабатываемых в настоящее время в теории игр, берут свое начало из этого труда

Джон Форбс Нэш

американский математик

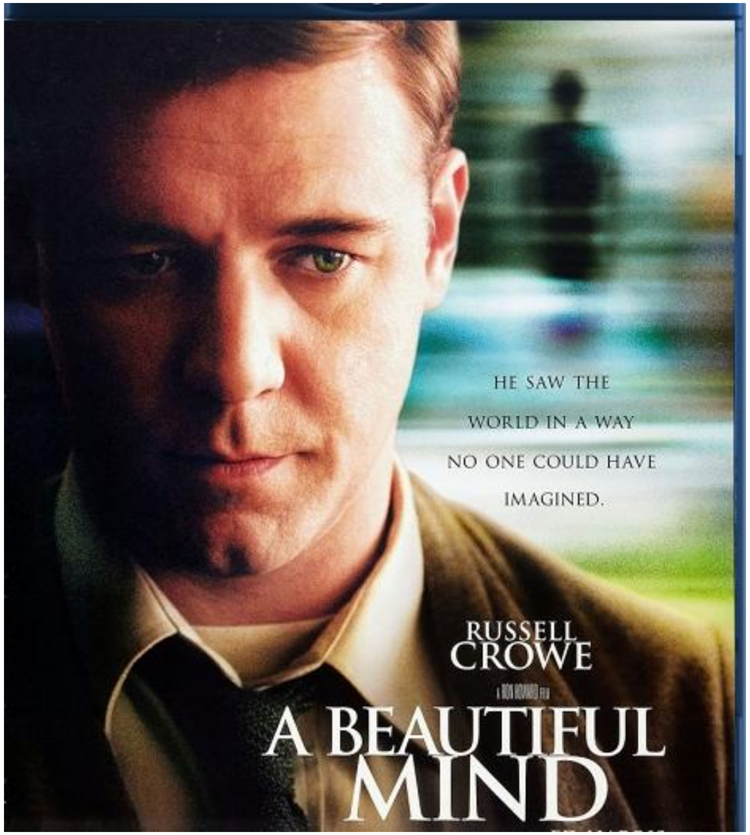
1. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года «За анализ равновесия в теории некооперативных игр».
2. Сотрудник RAND Corporation.
3. Работал в Принстоне и Массачусетском технологическом институте, получил звание профессора Принстонского университета

13 июня 1928 г.

Дж. Нэш доказал, что классический подход к конкуренции А.Смита, когда каждый сам за себя, неоптимален.

Наиболее оптимальны те стратегии, при которых каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других.

«Игры разума» (2001 г.)



– реж. Рон Ховард
– гл. роли Рассел Кроу, Дженнифер Коннелли
– награды: четыре «Оскара» *(лучший фильм, адаптированный сценарий, режиссура, актриса второго плана)*, «Золотой глобус» *(за лучшую мужскую роль)*

Игра - упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации.

Цель теории игр - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам:

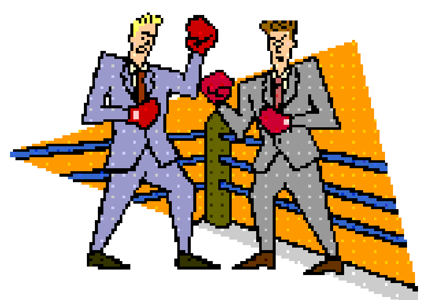
1. Правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации.
2. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

<u>АНТАГОНИЗМ</u> — *(от греч. antahonisma спор, борьба)* противоречие, для которого характерна острая непримиримая борьба враждующих сил, тенденций.

Примеры конфликтных ситуаций:

взаимоотношения покупателя и продавца

конкуренция различных фирм



боевые действия

А также обычные игры

Игроки – заинтересованные стороны в игре.

Партия игры – каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала до конца.

Ход игрока – выбор и осуществление действия производимого одним игроком в условиях точно определенных правилами игры.

Игра состоит из **ходов**, выполняемых игроками одновременно или последовательно

личный

случайный

Ход называется **личным**, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его.

Ход называется **случайным**, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают.

Стратегия игрока называется ***оптимальной***, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний

проигрыш, независимо

от того, какие стратегии

применяет противник.

Теория игр имеет свои недостатки:

1. Предположение о полной (“идеальной”) разумности противников.

В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем слабость противника и воспользоваться этой слабостью

Теория игр имеет свои недостатки:

2. Каждому из игроков должны быть известны все возможные действия (стратегии) противника, неизвестно лишь то, каким именно из них он воспользуется в данной партии.

В реальном конфликте перечень всех возможных стратегий противника неизвестен, а наилучшим решением в конфликтной ситуации нередко будет именно выход за пределы известных противнику стратегий

3.2. Классификация видов игр

Единой классификации игр не существует, поэтому игры классифицируются по различным признакам и критериям

По ***видам ходов*** игры подразделяются на:

- ***азартные*** - состоят только из случайных ходов *(ими теория игр не занимается)*;

- ***стратегические*** - если наряду со случайными ходами есть личные ходы, или все ходы личные.

В зависимости от **числа участников** :

Парные
(число участников равно двум)

Множественные
(число участников более двух)

По ***характеру взаимоотношений*** игроков:

- **Бесконалиционные** *(игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции);*
- **Коалиционные** *(действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов);*
- **Кооперативные** (*выигрыш коалиции возникает не как следствие тех или иных действий игроков, а как результат их наперед определенных соглашений).*

В зависимости от ***количества ходов игроков*** :

- **конечные** – конечное число ходов игроков;
- **бесконечные** – поиск решения хотя бы у одного игрока может продолжаться бесконечно долго.

По ***полноте информации***, имеющейся у игроков относительно прошлых ходов:

По ***характеру выигрышей*** участников игры:

<u>С НУЛЕВОЙ СУММОЙ</u>

любая возможная партия некоторой игры имеет нулевую сумму выигрышей всех игроков

Антагонистическая игра – игра, воспроизводящая, моделирующая экономическую ситуацию противостояния, противоборства, конкуренции двух сторон с взаимно противоположными интересами

По ***характеру выигрышей*** участников игры:

<u>С НЕНУЛЕВОЙ СУММОЙ</u>

не обязательно выигрыш одного игрока означает проигрыш другого

Биматричная игра - это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока.

По ***равности выигрышей***:

- ***симметричные*** – игры, при которых соответствующие стратегии у игроков будут равны, то есть иметь одинаковые платежи (выигрыши).
- ***несимметричные***.

По ***очередности ходов***:

- ***параллельные*** – игры, в которых игроки ходят одновременно, или, по крайней мере, они не осведомлены о выборе других до тех пор, пока все не сделают свой ход;
- ***последовательные*** – игры, в которых участники могут делать ходы в заранее установленном либо случайном порядке, но при этом они получают некоторую информацию о предшествующих действиях других.

Неопределенность – это когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника.

Неопределенность зависит от недостатка информации о внешних условиях, в которых будет приниматься решение и не зависит от действий игрока

Неопределенность может быть следствием многих причин:

- колебание спроса;
- нестабильность экономической ситуации;
- изменение курса валют;
- колебание уровня инфляции;
- неустойчивая биржевая ситуация;
- погода как природное явление.

В таких задачах выбор решения зависит от состояния объективной действительности, называемой ***«природой»***, а математические модели называются ***«игры с природой»***.

Игра, в которой осознанно действует только один из игроков, называется ***игрой с природой.***

*«**Природа**» – это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в данном конфликте, хотя такую ситуацию конфликтом можно назвать лишь условно.*

Природа может принимать одно из своих возможных состояний и <u>не имеет целью получение выигрыша</u>

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока ***А***, но не являются проигрышами природы ***П***.

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} – выигрыш игрока **А** при стратегии A_i в состоянии природы $П_j$

$$\textit{выигрыши игрока А} \longrightarrow \left\{ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}_{\textit{природа (П)}} \right.$$

Матрица еще называется ***матрицей доходности***, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

В «играх с природой»

задача выбора оптимальной стратегии для игрока *А* упрощается

задача выбора оптимальной стратегии для игрока *А* осложняется из-за дефицита информации о поведении природы

Различают два вида задач в играх с природой:

1.***<u>Задачи о принятии решений в условиях неопределенности</u>***, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы
2.***<u>Задача о принятии решений в условиях риска</u>***, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний

1. Уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью.

2. Массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.
3. Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации.

3.3.1 Игровые модели в условиях неопределенности

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами
$\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m}$

Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами $\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n}$.

Если будет принято ***i-е*** решение, а состояние внешней среды соответствует ***j-й*** ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется *j-е* состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$\mathbf{b_j = max(a_{ij}),}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Принимая *i*-е решение, игрок ***A*** рискует получить не b_j, а только a_{ij}, то есть, если игрок примет *i*-е решение, а в природе реализуется ***j-е*** состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$\boxed{r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}}$$

(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется j-е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход $b_j = \max(a_{ij})$, $j = 1, 2, \ldots, n$)

a_{ij} – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся i-ых вариантов при наступлении j-ого сценария развития событий

a_{maxj} - значение показателя доходности i-ого варианта стратегии при наступлении j-ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

Матрица рисков (сожалений) отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев.

При решении Задачи о принятии решений в условиях неопределенности для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- критерий Вальда,
- критерий оптимизма,
- критерий пессимизма,
- критерий Сэвиджа,
- критерий Гурвица

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало большинство критериев.

1) **Критерий Вальда** (*критерий гарантированного результата, максиминный критерий*) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$\boxed{W = \max_{i} \min_{j} a_{ij},}$$

a_{ij} *– элемент матрицы доходности.*

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;
- не допускается никакой риск;
- реализуется лишь малое количество решений.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Вальда.

Решение:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10;12;13) = 13$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

2) **Критерий оптимизма** (*критерий максимакса*) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$M = \max_{i} \max_{j} a_{ij},$$

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию оптимизма (*M*) является наибольший из показателей эффективности чистых стратегий.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию оптимизма.

Решение:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20;16;18) = 20$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

3) **Критерий пессимизма** предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$\boxed{P = \min_{i} \min_{j} a_{ij},}$$

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию пессимизма.

Решение:

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10;12;13) = 10$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

Миниминный критерий относительно рисков (*μ-критерий*). Показателем неэффективности стратегии A_i игрока А считается наименьший риск при выборе этой стратегии и обозначается через μ.

$$\mu_i = \min_{1 \le j \le n} r_{ij}, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

где r_{ij} – матрица рисков.

Поскольку риски неотрицательны, то и *μ-критерий* это величина неотрицательная, т.е. $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
Таким образом:

$$\boxed{\mu = \min_{i} \min_{j} r_{ij}}$$

Чистая стратегия относительно рисков является μ-оптимальной, если соответствующая ей строка матрицы рисков содержит хотя бы один ноль.

μ-критерий является критерием крайнего оптимизма по отношению к рискам, так как игрок предполагает, что природа будет к нему благосклонна и будет находиться в благоприятном для него состоянии, при котором риск будет сведен к нулю.

4) **Критерий Сэвиджа** *(критерий минимаксного риска Сэвиджа)* предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_{i} \max_{j} r_{ij},$$

Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.

Критерий Сэвиджа позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое то рассчитывало вначале.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа называется минимальный показатель неэффективности среди показателей неэффективности всех чистых стратегий.

Теорема: Для того чтобы чистая стратегия была безрисковой, т.е. чтобы её показатель неэффективности по критерию Сэвиджа был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы она доминировала каждую из остальных чистых стратегий.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	20	15	10
$А_2$	16	12	14
$А_3$	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа.

Решение:

Применяем формулу $r_{ij} = a_{maxj} - a_{ij}$, построим матрицу рисков.

Матрица рисков

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

$$S = \min_j \max_j r_{ij} = \min(5;6;7) = 5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

5) **Критерий Гурвица** *(взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации)* предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$\boxed{H = \max_i \ \lambda \cdot \max_j a_{ij} + \ 1 - \lambda \ \cdot \min_j a_{ij} \ ,}$$

где λ – *коэффициент оптимизма,* $0 \leq \lambda \leq 1$

Коэффициент λ выражает количественно «меру оптимизма» игрока *А* при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица принимающего решение в схожих ситуациях.

1. Если $\lambda \to 1$, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда
2. Если $\lambda \to 0$, то правило Гурвица приближается к правилу оптимизма

если ***λ*** коэффициент оптимизма, то ***(λ – 1)*** коэффициент пессимизма

Критерий Гурвица позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица.

$\lambda = 0{,}5$

Решение:

$$H = \max_i \left(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right)$$

$$H_1 = (0,5 \cdot 20) + ((1-0,5) \cdot 10) = 10 + 5 = 15$$

$$H_2 = (0,5 \cdot 16) + ((1-0,5) \cdot 12) = 8 + 6 = 14$$

$$H_3 = (0,5 \cdot 18) + ((1-0,5) \cdot 13) = 9 + 6,5 = 15,5$$

$$H = \max_i (15;14;15,5) = 15,5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

При решении ***Задачи о принятии решений в условиях риска*** различным состояниям природы поставлены в соответствие соответствующие вероятности.
Игрок А принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска

Критерии оптимальности в условиях риска:

- критерий Байеса;
- критерий Лапласа;
- критерий максимальной вероятности

1) Критерий Байеса относительно выигрышей

Предположим, что игроку *А* известны не только состояния $П_1$, $П_2$,…$П_n$ в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности (q_1, q_2,…q_n) наступления этих состояний, при этом $\sum q_j = 1$.

Это говорит о том, что лицо принимающее решение находится в условиях риска.

Матрицу выигрышей игрока *А* и вероятности состояний природы *П* можно представить в виде общей матрицы:

A =

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	…	$\boldsymbol{q_n}$

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения

A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{in}
q	q_1	q_2	…	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$\boxed{B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,\dots, m}$$

Оно означает средне взвешенное выигрышей i-ой строки матрицы A с весами $(q_1, q_2, \dots q_n)$.

Критерий Байеса относительно выигрышей

позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$\boxed{B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}}$$

2) Критерий Байеса относительно рисков

Матрицу рисков игрока *A* и вероятности состояний природы *П* можно представить матрицей:

$R =$

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}
q_j	q_1	q_2	…	q_n

Показателем эффективности стратегии A_i по *критерию Байеса относительно рисков* является математическое ожидание рисков, расположенных в i-ой строке матрицы R.

$$\boxed{B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, i = 1,2,\ldots, m}$$

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:

$$\boxed{B^{r} = \min_{i}\left\{\sum_{j=1}^{n} q_{j} r_{ij}\right\}}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

3) Критерий Лапласа относительно выигрышей

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_j = n^{-1}$$

$$\sum q_j = \sum n^{-1} = 1$$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Имеется игра с природой, в которой игрок A обладает m чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из n своих состояний $П_j$, а матрица выигрышей игрока A задается следующим образом:

A =

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\boldsymbol{q_j}$	$\boldsymbol{q_1=n^{-1}}$	$\boldsymbol{q_2=n^{-1}}$	…	$\boldsymbol{q_n=n^{-1}}$

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию Лапласа относительно выигрышей* является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии.

$$\boxed{L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1,2,..., m}$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей

предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$\boxed{L = \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}, i = 1, 2, \ldots, m}$$

4) Критерий Лапласа относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

$R =$

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}
q_j	$q_1=n^{-1}$	$q_2=n^{-1}$	…	$q_n=n^{-1}$

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию ***Лапласа относительно рисков*** является среднеарифметическое рисков при этой стратегии.

$$L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1,2,\ldots, m$$

Критерий Лапласа относительно рисков

предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$\boxed{L^{r} = \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\}, \; i = 1,2,\ldots, m}$$

Критерий максимальной вероятности

Рассмотрим игру с природой размера $m \times n$, где $m \geq 2$ и $n \geq 2$.
Известны вероятности q_j состояний природы $П_j$

Максимальная вероятность обозначается следующим образом:

$$q^{\max} = \max_{1 \le j \le 1} q_j$$

Максимальную вероятность может иметь не одно состояние природы. А также максимальное значение может быть у всех состояний природы при равных вероятностях $\boldsymbol{q_j = n^{-1}}$.

Предположим, что состояния природы $\boldsymbol{\Pi_{jk}}$, $\kappa = 1,2,\ldots\sigma$, где σ – это номер состояний природы (столбцы), имеющих максимальную вероятность.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию максимальной вероятности относительно выигрышей, является наибольший выигрыш из выигрышей при этой стратегии и при состояниях природы $П_{j\kappa}$ $\kappa = 1,2,\ldots\sigma$, имеющих максимальную вероятность q^{max}.

$$\boxed{Q_i^p = \max_{1 \le \kappa \le \sigma} a_{ij_\kappa}, i = 1,2,\ldots m}$$

В связи с этим рассматривается матрица *m* x *σ*, которая получается путем исключения тех столбцов, у которых вероятности ниже максимального значения.

A =	$A_i \backslash П_j$	$П_{j1}$	$П_{j2}$	…	$П_{jσ}$	Q_m^p
	A_1	a_{1j1}	a_{1j2}	…	$a_{1jσ}$	Q_1^p
	A_2	a_{2j1}	a_{2j2}	…	$a_{2jσ}$	Q_2^p
	…	…	…	…	…	…
	A_m	a_{mj1}	a_{mj2}	…	$a_{mjσ}$	Q_i^p
	$q_{jк}$	$q_{j1}= q^{max}$	$q_{j2}= q^{max}$	…	$q_{jσ}= q^{max}$	

Ценой игры (Q^p) при критерии максимальной вероятности относительно выигрышей будет наибольший элемент из показателей эффективности Q_i^p

$$\boxed{Q^p = \max_{1 \le i \le m} Q_i^p}$$

Рассмотрим случай, когда максимальную вероятность имеет только одно состояние природы, то есть σ = 1. Тогда матрица m х σ превращается в j_1 – й столбец, при которой выигрыш a_{kj1} – наибольший среди состояний природы $П_{j1}$.

A =	$П_j$ / A_i	$П_{j1}$	Q_m^p
	A_1	a_{1j1}	$Q_2^p = a_{1j1}$
	A_2	a_{2j1}	$Q_1^p = a_{2j1}$
	...	...	...
	A_m	a_{mj1}	$Q_i^p = a_{mj1}$
	$q_{jк}$	$q_{j1} = q^{max}$	

Пример:

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию максимальной вероятности относительно выигрышей при вероятностях состояний природы
$q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.