Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

I. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$

Целое число n, где $R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)$ – рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$. Замена $ax+b=z^n \Rightarrow x=\frac{z^n-b}{a} \Rightarrow dx=\frac{nz^{n-1}}{a}dz$ $z=\sqrt[n]{ax+b}$

1. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-4}+2\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x-3}}$

4. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

II. Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Этот интеграл решается выделением полного квадрата $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$

$\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+dx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\int \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Для нахождения этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего п $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=$ од знаком корня и разложим на сумму двух интегралов.

Пример. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-(x^2-6x+9)+9-8}}dx=\int \frac{3x+4}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{matrix} t=x-3 \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{matrix}\right\}=\int \frac{3(t+3)+4}{\sqrt{1-t^2}}dt=$$

$$\int \frac{3t}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int \frac{13}{\sqrt{1-t^2}}dt=-3\cdot\sqrt{1-(x-3)^2}+13\arcsin(x-3)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a\pm x^2}}dx=\pm\sqrt{a\pm x^2}+C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

III. Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m (a+bx^n)^p dx$

где m, n, p – рациональные числа. Как доказал П.Л. Чебышев, интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

1) p – целое число, тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателя дробей m и n.
2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, в этом случае данный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a + bx^n = t^s$;
3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число, в этом случае к той же цели ведет подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где – знаменатель дроби .

Примеры.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^{2}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

IV. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$

Приводятся к интегралам от рациональной относительно и функции с помощью тригонометрической подстановки:

Для $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ замена

Для $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ замена $x = atgt$

Для $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ замена $x = \dfrac{a}{\cos t}$

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$ 3

Дома.

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}}$

3. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$