

Интегрирование тригонометрических функций

1. $\int \sin^m x \cos^n x dx.$

а) m или $n \geq 0$ И

m – нечетное, тогда замена $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$

n – нечетное, тогда замена $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$

б) m или $n > 0$ – нечетные, тогда интегрируем используя формулы понижения степени

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

в) m или $n > 0$ – целые, одинаковой четности.

Замена $u = \operatorname{tg} x$, $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{u^2 + 1}$ или

$u = \operatorname{ctg} x$, $du = \frac{dx}{\sin^2 x}$, $\sin^2 x = \frac{1}{u^2 + 1}$ или

Примеры

1. $\int \sin^5 x \cos^5 x dx$

2. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

3. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$

2. $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x)$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x)$$

Примеры.

1. $\int \sin 7x \cos x dx$

2. $\int \sin 5x \sin 9x dx$

$$3. \int \cos 5x \cos 2x dx$$

$$3. \int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная тригонометрическая замена

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$4. \int R(\sin x, \cos x) dx$$

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$$

Замена

$$t = \operatorname{tg} x,$$

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Примеры.

$$1. \int \cos^6 x dx$$

$$2. \int \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x} dx$$

$$3. \int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

4.

$$5. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x}$$

$$7. \int \frac{1}{2 + 3 \cos x} dx$$

Дома

$$\int \sin 8x \cos 6x dx$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 3 \cos x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$$

$$\int \frac{1 - \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\int \sin^6 x dx$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

