КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Криволинейные координаты второго рода или по координатам

$$I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

а) $y=y(x)$, $a\le x\le b$

$$I=\int_a^b (P(x,y(x))+Q(x,y(x))\cdot y'(x))dx$$

б) $x=x(y)$, $c\le y\le d$

$$I=\int_c^d (P(x(y),y)\cdot x'(y)+Q(x(y),y))dy$$

а) $y=y(t)$, $x=x(t)$, $t_1\le t\le t_2$

$$I=\int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t))dt$$

Примеры

1. $\int_L xdy(3)$

где L: контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ в положительном направлении.

2. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx+(y-x)dy$

где а) $y^2=x\,(17/30)$

б) $y=x^3$ (-1/20)

3. $\int_L ydx+xdy(0)$

4. $\int_L xydx(\sqrt{5}\ln 2)$

где L: контур треугольника, заключенный между точками $A(0,-2)$, $B(4,0)$, $C(0,0)$.

4. $\int_L (2a-y)dx-(a-y)dy(\pi a^2)$

где L: первая (от начала координат) арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

2. Криволинейные координаты первого рода или по длине дуге

$$I=\int_L f(x,y)dl$$

а) $y=y(x)$, $a\le x\le b$

$$I=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

б) $x=x(y)$, $c\le y\le d$

$$I=\int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+(x'(y))^2}dy$$

а) $y=y(t)$, $x=x(t)$, $t_1\le t\le t_2$

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

Примеры.

1. $\int_L \frac{dl}{x-y}(\sqrt{5}\ln 2)$

где L: отрезок прямой $y=\frac{x}{2}-2$ заключенная между точками $A(0,-2)$, $B(4,0)$.

2. $\int\limits_L xydl$ (24)

где L: прямоугольник, с вершинами $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$.

3. $\int\limits_L xydl\left(\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$

где L: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в первом квадрате.

4. $\int\limits_L ydl(\sqrt{5}\ln 2)$

где L: дуга параболы $y^2=2px$ отсеченная параболой $x^2=2py$.

5. $\int\limits_L xydl(2\pi a^7)$

где L: окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$

5. $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl\,(8\pi^3 a\frac{\sqrt{2}}{3})$

где L: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$ – первый виток винтовой линии

3.Формула Грина

$$I=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

где L: граница области D.

Примеры.

1. $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy\left(-\frac{a^3\pi}{8}\right)$

где L: $x^2+y^2=ax$

Дома.

1. $\int\limits_L (x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, L - ломанная OAB, где $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,2)$.
2. $\int\limits_L \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$, L - первая четверть окружности $\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=t\sin t\end{cases}$,пробегаемая против часовой стрелки.
3. $\int\limits_L x^2ydx+x^3dy$, L - контур, ограниченный параболами $y^2=x$, $x^2=y$ и пробегаемая против часовой стрелки.
1. $\int\limits_L xydl$ где L: окружность $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t.\end{cases}$

2. $\int\limits_L (x-y)dl$, L - отрезок прямой от $A(0,0)$ до $B(4,3)$.

3. $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x}}$ AB – дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4}{9}x^3$, $x^2 = y$ от $A(3,2\sqrt{3})$ до $B(8,\frac{32\sqrt{2}}{3})$.