

Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: *Поверхностный интеграл I рода*

Лектор Янущик О.В.

2012 г.

# §11. Поверхностный интеграл I рода

## 1. Задача, приводящая к поверхностному интегралу I рода

Пусть  $(S)$  – квадратируемая поверхность в  $Oxyz$ ,

$\gamma = \gamma(x, y, z)$  – плотность распределения массы по  $(S)$

ЗАДАЧА. Найти массу  $m$  поверхности  $(S)$ .

1. Разобьем  $(S)$  на  $n$  частей  $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \dots, (\Delta S_n)$ .

2. Если  $(\Delta S_i)$  – мала, то  $(\Delta S_i)$  можно считать однородной и ее

масса  $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i$ ,

где  $\Delta S_i$  – площадь  $(\Delta S_i)$ ,  $P_i$  – произвольная точка из  $(\Delta S_i)$ .

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i,$$

$$m = \lim_{(\Delta S_i) \rightarrow P_i} \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i,$$

## 2. Определение и свойства поверхностного интеграла I рода

Пусть  $(S)$  – квадратируемая (т.е. имеющая площадь) область в пространстве  $Oxyz$ , и на  $(S)$  задана функция  $u = f(x, y, z)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем поверхность  $(S)$  произвольным образом на  $n$  частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1), (\Delta S_2), \dots, (\Delta S_n).$$

2. На каждой части  $(\Delta S_i)$  выберем произвольную точку  $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$  и вычислим произведение  $f(P_i) \cdot \Delta S_i$ , где  $\Delta S_i$  – площадь части  $(\Delta S_i)$ .

Сумму

$$I_n(\Delta S_i, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta S_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $(S)$  (соответствующей данному разбиению поверхности  $(S)$  и данному выбору точек  $P_i$ ).

Пусть  $d_i$  – диаметр  $(\Delta S_i)$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$

Число  $I$  называется **пределом интегральных сумм**  $I_n(\Delta S_i, P_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения поверхности  $(S)$  у которого  $\lambda < \delta$ , при любом выборе точек  $P_i$  выполняется неравенство

$$| I_n(\Delta S_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм  $I_n(\Delta S_i, P_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , то его называют **поверхностным интегралом I рода (по площади поверхности) от функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $(S)$ .**

Обозначают: 
$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds .$$

# СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

*Замечание:* предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1.  $\iint_{(S)} ds = S$ , где  $S$  – площадь поверхности  $(S)$ .

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла I рода, т.е.

$$\iint_{(S)} c \cdot f(x, y, z) ds = c \cdot \iint_{(S)} f(x, y, z) ds.$$

3. Поверхностный интеграл I рода от алгебраической суммы 2-х (конечного числа) функций равен алгебраической сумме поверхностных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\iint_{(S)} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] ds = \iint_{(S)} f_1(x, y, z) ds + \iint_{(S)} f_2(x, y, z) ds.$$

4. Если поверхность интегрирования  $(S)$  разбита на две части  $(S_1)$  и  $(S_2)$ , не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(S_1)} f(x, y, z) ds + \iint_{(S_2)} f(x, y, z) ds.$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла I рода).

5. Если всюду на поверхности  $(S)$   $f(x, y, z) > 0$  ( $f(x, y, z) \geq 0$ ), то

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds > 0 \quad \left( \iint_{(S)} f(x, y, z) ds \geq 0 \right).$$

6. Если всюду на поверхности  $(S)$   $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$ , то

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds \leq \iint_{(S)} \varphi(x, y, z) ds.$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.

Если  $m$  и  $M$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x,y,z)$  на поверхности  $(S)$ , то

$$m \cdot S \leq \iint_{(S)} f(x, y, z) ds \leq M \cdot S,$$

где  $S$  – площадь поверхности  $(S)$ .

8. Теорема о среднем для поверхностного интеграла I рода.

*Если функция  $f(x,y,z)$  непрерывна на кводрируемой поверхности  $(S)$ , то найдется такая точка  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ , что справедливо равенство*

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = f(x_0, y_0, z_0) \cdot S,$$

*где  $S$  – площадь поверхности  $(S)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно**

### 3. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Пусть поверхность  $(S)$  задана формулой

$$z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in (\sigma_{xy}) \subset xOy. \quad (1)$$

Говорят: ***поверхность задана явно***.

Поверхность (1) называется ***гладкой***, если  $\varphi(x, y)$  имеет в области  $(\sigma_{xy})$  непрерывные частные производные

$$\varphi'_x(x, y) \text{ и } \varphi'_y(x, y).$$

В явном виде можно также задать поверхность формулой

$$x = \psi(y, z), \quad (y, z) \in (\sigma_{yz}) \subset yOz \quad \text{или} \quad y = \chi(x, z), \quad (x, z) \in (\sigma_{xz}) \subset xOz.$$

Пусть поверхность  $(S)$  задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Говорят: ***поверхность задана неявно***.

Поверхность (2) называется ***гладкой***, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность, которая может быть задана явно и является гладкой.

Пусть функция  $u = F(x, y, z)$  имеет непрерывные частные производные  $F'_x, F'_y, F'_z$ .

Точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  поверхности  $F(x, y, z) = 0$  называется **особой**, если  $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$ .

*Если на поверхности  $F(x, y, z) = 0$  нет особых точек, то она является гладкой.*

С геометрической точки зрения, гладкость поверхности  $(S)$  означает, что в каждой внутренней точке поверхности существует касательная плоскость (и нормаль), причем ее положение непрерывно меняется при перемещении точки касания по поверхности.

Поверхность, составленная из нескольких гладких частей, называется *кусочно-гладкой*.

## ТЕОРЕМА 1.

Пусть  $(S)$  – гладкая поверхность, заданная уравнением (1);  
 $(\sigma_{xy})$  – квадратуемая область в плоскости  $xOy$  ;  
функция  $f(x,y,z)$  непрерывна на  $(S)$  .

Тогда  $f(x,y,z)$  интегрируема по поверхности  $(S)$  и справедливо равенство

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

## СЛЕДСТВИЕ 2.

Пусть  $(S)$  – гладкая поверхность, заданная уравнением

$$x = \psi(y, z), \quad (y, z) \in (\sigma_{yz});$$

$(\sigma_{yz})$  – квадратируемая область в плоскости  $yOz$ ;

функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $(S)$ .

Тогда  $f(x, y, z)$  интегрируема по поверхности  $(S)$  и

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(\sigma_{yz})} f(\psi(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + (\psi'_y)^2 + (\psi'_z)^2} dydz.$$

## СЛЕДСТВИЕ 3.

Пусть  $(S)$  – гладкая поверхность, заданная уравнением

$$y = \chi(x, z), \quad (x, z) \in (\sigma_{xz});$$

$(\sigma_{xz})$  – квадратируемая область в плоскости  $xOz$ ;

функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $(S)$ .

Тогда  $f(x, y, z)$  интегрируема по поверхности  $(S)$  и

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) ds = \iint_{(\sigma_{xz})} f(x, \chi(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + (\chi'_x)^2 + (\chi'_z)^2} dx dz.$$

**ТЕОРЕМА 4** (достаточные условия существования поверхностного интеграла I рода).

*Пусть  $(S)$  – кусочно-гладкая поверхность, которая может быть явно задана, например, формулой  $z = \varphi(x,y)$ ,  $(x,y) \in (\sigma_{xy})$ .*

*Если  $(\sigma_{xy})$  – квадратуемая область в плоскости  $xOy$  и функция  $f(x,y,z)$  кусочно-непрерывна на  $(S)$ , то  $f(x,y,z)$  интегрируема по поверхности  $(S)$ .*

## 4. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов I рода

1) Площадь  $S$  квадратуемой поверхности  $(S) \in Oxyz$ :

$$S = \iint_{(S)} ds.$$

Пусть  $(S)$  – материальная квадратуемая поверхность в  $Oxyz$  с плотностью  $\gamma(x, y, z)$ .

Тогда

$$2) \iint_{(S)} \gamma(x, y, z) ds = m \quad \text{– масса поверхности } (S) .$$

3) Статические моменты поверхности ( $S$ ) относительно плоскостей  $xOy$ ,  $yOz$  и  $xOz$  равны соответственно:

$$S_{xy} = \iint_{(S)} z \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{yz} = \iint_{(S)} x \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{xz} = \iint_{(S)} y \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

$$4) x_0 = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \frac{S_{xy}}{m} \quad - \text{координаты центра тяжести}$$

поверхности ( $S$ ).

5) Моменты инерции поверхности  $(S)$  относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  равны соответственно:

$$I_x = \iint_{(S)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$I_y = \iint_{(S)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$I_z = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

6)  $I_o = \iint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$  – момент инерции поверхности  $(S)$  относительно начала координат .