Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Криволинейный интеграл*** **II** ***рода***

Лектор Янущик О.В.

2012 г.

§10. Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу II рода

Пусть под действием силы $\bar{\mathbf{F}} = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$ точка перемещается по кривой (ℓ) из точки L_1 в точку L_2.

ЗАДАЧА: найти работу, которую совершает сила $\bar{\mathbf{F}}$.

1. Разобьем (ℓ) на n частей точками $M_0=L_1$, M_1, …, $M_n=L_2$.
2. Если $(\Delta\ell_i) = (M_{i-1}M_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать отрезком, а $\bar{\mathbf{F}}$ – постоянной.

   Тогда работа силы по перемещению точки из M_{i-1} в M_i равна

$$A_i \approx P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i\,,$$

   где K_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$, $\overline{M_{i-1}M_i} = \{\Delta x_i;\Delta y_i;\Delta z_i\}$

Тогда

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i\,,$$

$$A = \lim_{(\Delta\ell_i)\to K_i} \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i\,.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла II рода

Пусть $(\ell) = (L_1L_2)$ – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $P(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей точками $M_0=L_1$, M_1, …, $M_n=L_2$ в направлении от L_1 к L_2.
2. Пусть $M_i(x_i;\, y_i;\, z_i)$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (т.е. проекцию дуги $(M_{i-1}M_i)$ на ось Ox)
3. На каждой дуге $(M_{i-1}M_i)$ выберем произвольную точку $K_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $P(K_i)\cdot\Delta x_i$.

Сумму

$$I_n(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $P(x,y,z)$ по кривой (ℓ) по переменой x (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек K_i).

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta M_{i-1} M_i$, где $\Delta M_{i-1} M_i$ – длина дуги $(M_{i-1} M_i)$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(M_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$ *, при любом выборе точек* K_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(M_i, K_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(M_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***криволинейным интегралом от функции P(x,y,z) по переменной x по кривой*** (ℓ).

Обозначают: $\int\limits_{(\ell)} P(x, y, z)dx$ или $\int\limits_{(L_1)}^{(L_2)} P(x, y, z)dx.$

Аналогично определяются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

Сумму $$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + \int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

записывают в виде

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и *называют* ***криволинейным интегралом*** **II** ***рода*** **(*по координатам*).**

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА

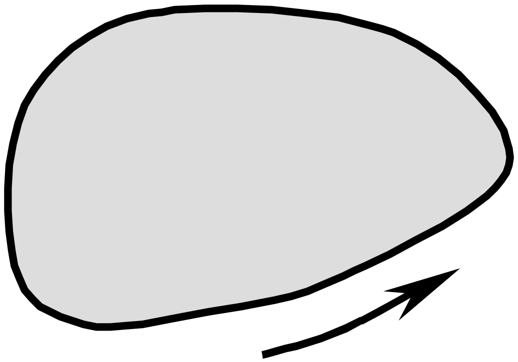
Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой (L_1L_2) криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{(L_2L_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если кривая (ℓ) замкнута, то криволинейный интеграл II рода не зависит выбора начальной точки L_1, а зависит от направления обхода кривой.

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область, лежащая «внутри» контура, остается слева по отношению к движущейся точке, называют ***положительным***. Противоположное ему направление называют ***отрицательным***.



На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.

Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру в положительном направлении обозначают:

$$\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

В отрицательном направлении:

$$\oint_{-(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ криволинейного интеграла II рода.

Пусть $\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$ – сила, под действием которой точка перемещается по кривой (ℓ) из L_1 в L_2 .

Работа, которую при этом совершает сила $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$, будет равна

$$A = \int\limits_{(\ell)} P dx + Q dy + R dz$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла II рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot P dx = c \cdot \int\limits_{(\ell)} P dx,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Q dy = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Q dy,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot R dz = c \cdot \int\limits_{(\ell)} R dz.$$

5. Криволинейный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} \left[P_1 + P_2\right] dx = \int\limits_{(\ell)} P_1 dx + \int\limits_{(\ell)} P_2 dx$$

$$\int\limits_{(\ell)} \left[Q_1 + Q_2\right] dy = \int\limits_{(\ell)} Q_1 dy + \int\limits_{(\ell)} Q_2 dy$$

$$\int\limits_{(\ell)} \left[R_1 + R_2\right] dz = \int\limits_{(\ell)} R_1 dz + \int\limits_{(\ell)} R_2 dz$$

6. Если кривая (L_1L_2) разбита точкой K на две части (L_1K) и (KL_2), то

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(L_1K)} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{(KL_2)} Pdx + Qdy + Rdz$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода).

3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая $(\ell)=(L_1L_2)$ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad (2)$$

где $t\in[\alpha;\beta]$ (или $t\in[\beta;\alpha]$) $(L_1\leftrightarrow\alpha,\ L_2\leftrightarrow\beta)$.

ТЕОРЕМА 1.

Если (ℓ) *– гладкая кривая, заданная уравнениями* (2) *и функция* $P(x,y,z)$ *непрерывна на* (ℓ)*, то* $P(x,y,z)$ *интегрируема по переменной x по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если выполнены условия:

1) $(\ell) = (L_1L_2)$ *– гладкая кривая в плоскости* xOy, *заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ (*где* x *пробегает отрезок с концами* a *и* b; $L_1(a;\varphi(a))$, $L_2(b;\varphi(b))$),

2) *функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *непрерывны на* (ℓ),

то существует криволинейный интеграл II *рода и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\right]dx$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия существования криволинейного интеграла II рода).

Если (ℓ) *– кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *кусочно-непрерывны на* (ℓ), *то существует интеграл*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

4. Связь между криволинейными интегралами II рода и двойными интегралами

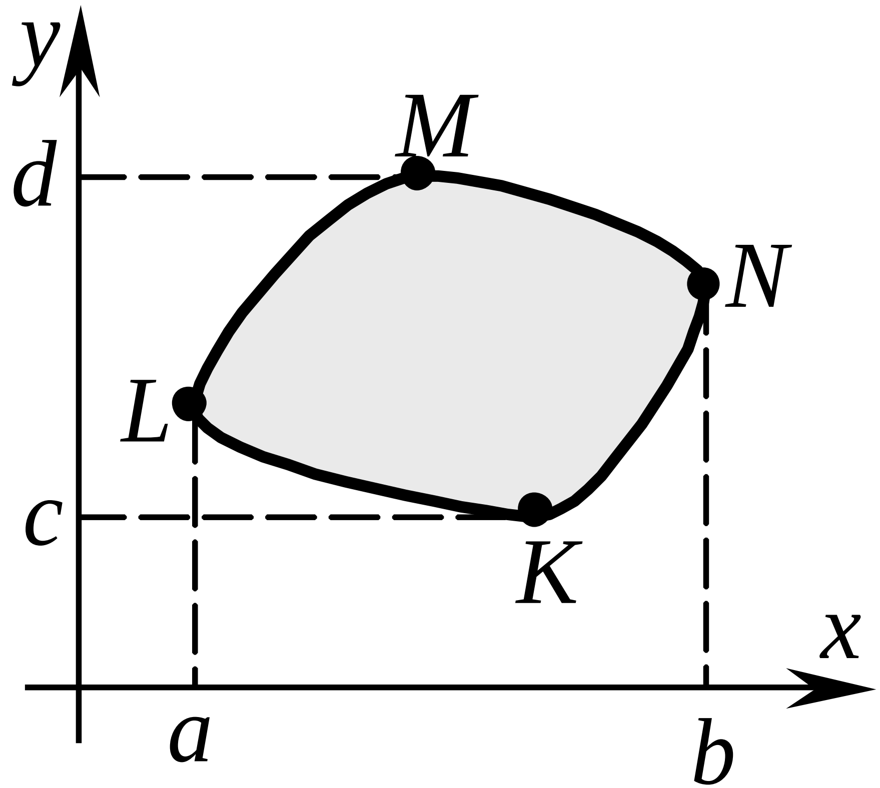
Пусть (σ) – замкнутая ограниченная область на плоскости xOy,
(ℓ) – граница (σ), кусочно гладкая,
$P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ – кусочно непрерывны в области (σ)

Тогда существуют интегралы

$$\oint\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} P'_y(x,y)dxdy, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} Q'_x(x,y)dxdy$$

и справедлива **формула Грина**:

$$\oint\limits_{+(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(\sigma)} \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$



y
d
M
N
L
c
K
x
a
b

5. Криволинейные интегралы II рода, не зависящие от пути интегрирования

ЛЕММА 4. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру (ℓ) был равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxyz$.

Следующие условия эквивалентны:

1) $\oint\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

2) выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

3) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, т.е.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz \, .$$

6. Интегрирование полных дифференциалов

Пусть $Pdx + Qdy + Rdz = du$;

$(\ell) = (L_1L_2)$ – простая гладкая кривая (любая)

(ℓ): $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$ (или $t \in [\beta;\alpha]$)

$(L_1 \leftrightarrow \alpha\ ,\ \ L_2 \leftrightarrow \beta)$.

Рассмотрим

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Получили:

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(L_2) - u(L_1)$$

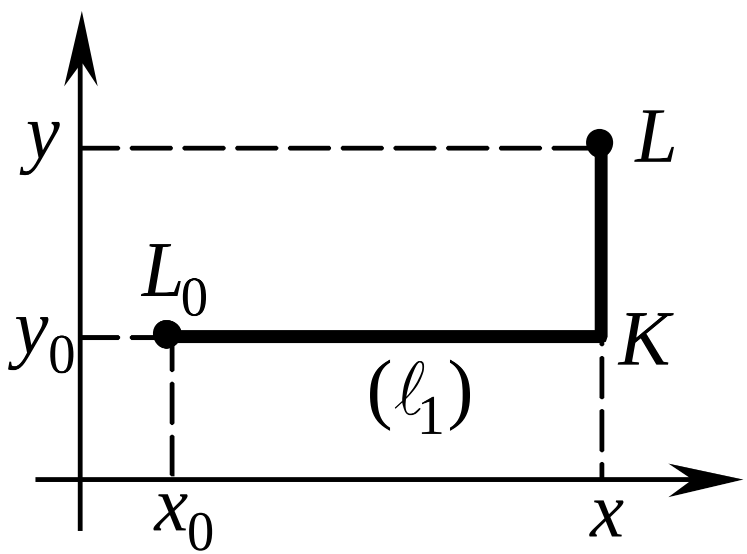
Таким образом, для криволинейного интеграла II рода от полного дифференциала справедлив аналог формулы Ньютона – Лейбница.

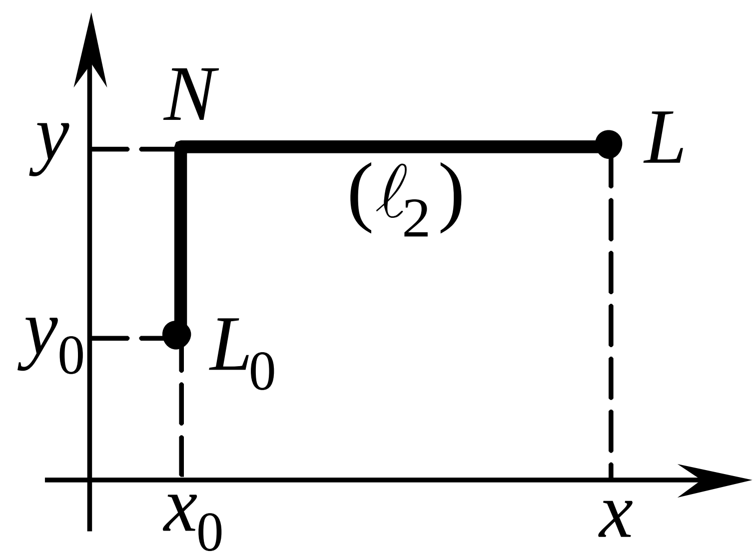
Нахождение функции по ее дифференциалу

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$;
Тогда $\forall L(x,y)$ и $\forall L_0(x_0,y_0)$

$$\int\limits_{(L_0L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(L) - u(L_0)$$

Рассмотрим интеграл, полагая $(L_0L) = (\ell_1)$ или $(L_0L) = (\ell_2)$:





Получили: $$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\underbrace{Q(x,y)}_{x-const}dy+C$$

или $$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\underbrace{P(x,y)}_{y-const}dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

7. Связь криволинейных интегралов I и II рода

Если (ℓ) – простая гладкая кривая, то справедлива формула

$$\int\limits_{(\ell)}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{(\ell)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\ell$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора, касательного к кривой (ℓ) .

8. Геометрическое приложение криволинейного интеграла II рода

Пусть (σ) – квадрируемая область в плоскости xOy,
(ℓ) – граница (σ), кусочно-гладкая.
Тогда площадь области (σ) может быть найдена по формуле:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint_{(\ell)} x\,dy - y\,dx$$