Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка***

(ЛНДУ, ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида)

Лектор Янущик О.В.

2012 г.

6. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)\,. \qquad (14)$$

Если известно общее решение соответствующего ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0\,, \qquad (15)$$

то можно найти и общее решение ЛНДУ (14).

Действительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ф.с.р. уравнения (15). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n\,, \qquad (16)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что РЕШЕНИЕ ЛНДУ ПО СТРУКТУРЕ совпадает с решением соответствующего ЛОДУ, т.е. имеет вид

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 + \ldots + C_n(x) \cdot y_n\,, \qquad (17)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые функции.

Потребуем, чтобы производные y', y'', …, $y^{(n-1)}$ функции (17) структурно совпадали с производными функции (16), т.е. чтобы они получались из соответствующих производных функции (16) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$.

Получили, что $C_1(x)$, $C_2(x)$, … , $C_n(x)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (18)$$

(18) – система n линейных уравнений с n неизвестными.
Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Так как $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют ф.с.р. однородного уравнения, то по теореме 4 §14(2) $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]$.

$\Rightarrow$ система (18) совместна и имеет единственное решение:

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \tilde{C}_i ,$$

где $\tilde{C}_i$ – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \tilde{C}_i \right) y_i . \tag{19}$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

7. ЛНДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (19) и сгруппируем слагаемые:

$$y = \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x) + \tilde{C}_i\right)y_i = \sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_i y_i + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x) y_i .$$

Первая сумма – общее решение соответствующего ЛОДУ, вторая сумма – частное решение ЛНДУ (получается из общего решения при $\tilde{C}_i = 0$).

ТЕОРЕМА 7 (О структуре частного решения ЛНДУ).

Общее решение ЛНДУ n–го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения, т.е. имеет вид

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x) , \qquad (20)$$

где $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ – ф.с.р. соответствующего ЛОДУ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть правая часть $f(x)$ ЛНДУ с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x\,], \qquad (21)$$

где $P_s(x)$, $P_k(x)$ – многочлены степени s и k соответственно, α и β – некоторые числа.

Функцию (21) принято называть ***функцией специального вида*.**

ТЕОРЕМА 8 (о структуре частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида).

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид (21), *то частным решением уравнения является функция вида*

$$\bar{y} = x^{\ell} \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cdot \cos\beta x + T_m(x) \cdot \sin\beta x\,], \qquad (22)$$

где $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *–многочлены степени* m (неизвестные),

m *– большая из степеней многочленов* $P_s(x)$, $P_k(x)$,

ℓ *– кратность характеристического корня* $\alpha \pm \beta i$

($\ell = 0$, *если* $\alpha \pm \beta i$ *не характеристический корень*).

ПРИМЕРЫ. Записать структуру частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами, если его правая часть $f(x)$ имеет вид:

1) $f(x) = P_s(x)$;

2) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$, где a – число;

3) $f(x) = P_s(x) \cdot e^{\alpha x}$;

4) $f(x) = a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x$, где a,b – числа;

5) $f(x) = a \cdot \cos\beta x$ (или $f(x) = a \cdot \sin\beta x$)

6) $f(x) = P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x$;

7) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + b \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

ТЕОРЕМА 9 (о наложении решений).

Если $\bar{y}_1(x)$ *и* $\bar{y}_2(x)$ – *решения соответственно уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_1(x)\,,$$

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_2(x)\,,$$

то функция

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$$

будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f_1(x) + f_2(x)\,.$$