

Дифференциальные уравнения

Тема: *Дифференциальные уравнения:
основные понятия.
Уравнения с разделенными и
разделяющимися переменными*

Лектор Янущик О.В.

2012 г.

Теория дифференциальных уравнений – раздел математики, в котором изучаются дифференциальные уравнения (вопросы существования решения дифференциального уравнения, его единственность и способы нахождения).

ЛИТЕРАТУРА

- Краснов М.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*
- Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи*
- Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. *Обыкновенные дифференциальные уравнения (часть I)*
- Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Имас О.Н., Пахомова Е.Г. *Обыкновенные дифференциальные уравнения (часть II)*
- Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений*
- Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям*
- Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям*

ГЛАВА I. Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$.

⇒ в общем случае ОДУ имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производной, входящей в ОДУ, называется *порядком дифференциального уравнения*.

ПРИМЕР. Определить порядок уравнений:

$$\begin{aligned} y' + xy - x^2 = 0, & \quad x(y')^2 + e^x = 0, & \quad (y')^5 + e^{y^2} = 0, \\ xy'' - (y')^3 - y = 0, & \quad y'' - y' = 1, & \quad y^2 - y''' + x^5 = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Уравнение, связывающее неизвестную функцию n переменных, ее аргументы и ее частные производные, называется **уравнением в частных производных**.

Функция $y = \varphi(x)$ называется **решением дифференциального уравнения** на интервале $(a;b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a;b)$.

ПРИМЕР.

1) $y = \cos x$ – решение ДУ $y'' + y = 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ – решение ДУ $y' = -\frac{x}{y}$ в интервале $(-1; 1)$.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения, называется **интегралом дифференциального уравнения**.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

Дифференциальное уравнение называется *интегрируемым в квадратурах*, если все его решения могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированием этих функций.

§2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$

Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

где x – независимое переменное, y – неизвестная функция, F – заданная функция трех переменных.

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно записать в виде
$$y' = f(x,y) \quad (2)$$

*называется **уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.***

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения $y' = f(x, y)$ выполняются два условия:

- 1) $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости xOy ,
- 2) $f'_y(x, y)$ в области D ограничена.

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2), определенное в некотором интервале $(a; b)$ содержащем точку x_0 , и удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются **начальными значениями (данными)** для решения $y = \varphi(x)$.

Условие $y(x_0) = y_0$ называется **начальным условием**.

Геометрически, задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка (x_0, y_0) , через которую проходит интегральная кривая $y(x)$.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется **задачей Коши**.

Теорему **1** называют **теоремой существования и единственности решения задачи Коши** для ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется **частным**.

Решение (интеграл) $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т.е. через каждую точку кривой $y = \psi(x)$ проходит еще хотя бы одна, отличная от $y = \psi(x)$, интегральная кривая), называется **особым**.

График особого решения называют **особой интегральной кривой уравнения**.

Замечание. Теорема 1 дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

\Rightarrow Возможно, что в точке (x_0, y_0) условия теоремы 1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, существует и единственно.

Из теоремы 1 \Rightarrow

- 1) вся область D покрыта интегральными кривыми уравнения (2), которые нигде между собой не пересекаются;
- 2) ДУ (2) имеет множество решений. Совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Общим решением** дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в области D существования и единственности решения задачи Коши называется функция

$$y = \varphi(x, C),$$

зависящая от x и одной произвольной постоянной C , которая удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) при любом допустимом значении постоянной C она удовлетворяет уравнению (2);
- 2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$ (где $(x_0, y_0) \in D$), можно найти единственное значение $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется **общим интегралом уравнения**.

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$), является частным.

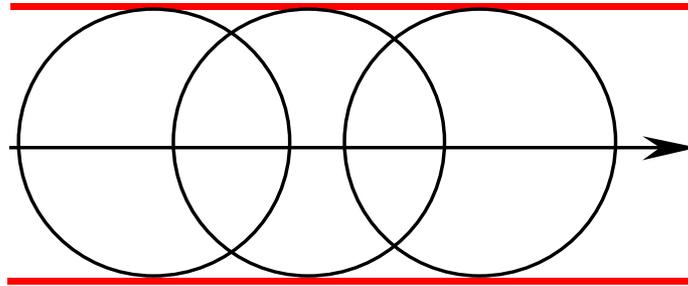
Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения.

Особое решение всегда «теряется» в процессе интегрирования и обладает тем свойством, что оно может быть включено в общее решение, если допустить $C = C(x)$.

С геометрической точки зрения особая интегральная кривая является огибающей семейства интегральных кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линия ℓ называется **огибающей** однопараметрического семейства кривых, если она в каждой своей точке касается одной кривой семейства, причем в различных точках она касается различных кривых.*

ПРИМЕР. Прямые $y = \pm R$ являются огибающими семейства окружностей $(x + C)^2 + y^2 = R^2$.



§3. Уравнения с разделенными переменными

ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно y' , имеет две формы записи:

1) обычную, т.е. $y' = f(x,y)$,

2) *дифференциальную*, т.е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (3)$$

При этом, если уравнение записано в виде (3), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0, \quad (4)$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$,
 $\Phi(y)$ – первообразная функции $\varphi(y)$.

Тогда общий интеграл уравнения (4) имеет вид:

$$F(x) + \Phi(y) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. В теории дифференциальных уравнений символом

$$\int f(x)dx$$

принято обозначать ОДНУ из первообразных функции $f(x)$ (а не все множество первообразных, как это принято в других разделах математического анализа).

Поэтому общий интеграл уравнения (4) принято записывать в виде:

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C,$$

где C – произвольная постоянная.

§4. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0, \quad (5)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – непрерывные функции.

Разделим обе части уравнения на $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = 0.$$

⇒ Общий интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = C.$$

Замечания.

- 1) Деление на $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$ может привести к потере решений. Поэтому чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $\varphi_1(y) = 0$, $f_2(x) = 0$.
- 2) Обычная форма дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y) .$$

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(ax + by + c) , \tag{6}$$

где a , b и c – некоторые числа.

Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x) = ax + by + c$ и его общий интеграл имеет вид:

$$\int \frac{dz}{bf(z) + a} = x + C .$$