Дифференциальные уравнения

Тема: ***Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным***

Лектор Янущик О.В.

2012 г.

§5. Однородные уравнения

Функция $M(x, y)$ называется ***однородной степени m*** (или ***измерения m***), если $\forall t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y) .$$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y, \qquad f(x, y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8},$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}, \qquad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

$$f(x, y) = \sin\frac{x}{y} + \ln y - \ln x.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется ***однородным*** *относительно* x *и* y, *если функция* $f(x, y)$ *является однородной нулевой степени.*

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – *однородные функции одного и того же измерения.*

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$z(x) = \frac{y}{x}$$

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены

$$\frac{x}{y} = z(y)$$

§6. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Рассмотрим уравнение $$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (7)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

а) ***Если*** $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$, ***то*** (7) ***приводится к однородному уравнению***.

Действительно, если $\Delta \neq 0$, то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \alpha$, $y = \beta$.

Сделаем в (7) замену переменных: $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$.

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha)+b_1(z+\beta)+c_1}{a_2(t+\alpha)+b_2(z+\beta)+c_2}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 t + b_2 z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right),$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right)}_{\text{однородное уравнение}}.$$

2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-*го порядка называется* ***обобщённо однородным***, *если существует такое рациональное число* α, *что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени* α *относительно* x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), *если считать* x – *величиной измерения* 1, y – *величиной измерения* α, $y'(dy)$ – *величиной измерения* $\alpha - 1$, dx – *величиной измерения* 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – обобщенно однородное, если $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(tx, t^{\alpha}y)dx + Q(tx, t^{\alpha}y) \cdot (t^{\alpha-1}dy) = t^{m} \cdot [\, P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,] .$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой $y = z^{\alpha}$.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = zx^{\alpha}$.

§7. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка *называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y'.*

$\Rightarrow$ В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно записать в виде $$y' + p(x) \cdot y = f(x)\,, \qquad (8)$$
где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Линейное однородное уравнение
$$y' + p(x) \cdot y = 0$$
является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение:
$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall C. \qquad (9)$$

Получим: $$C(x)=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

$$y(x)=\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (10)$$

Замечания.

1) Раскроем скобки в (10):

$$y(x)=C\cdot e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (11)$$

Заметим, что первое слагаемое в (11) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (8):

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)\,. \qquad (8)$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) ***Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)***

1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, соответствующее данному неоднородному уравнению.

   Его общее решение имеет вид (9):

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

   $\Rightarrow$ Оно имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

   Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (8).

2) Так как $e^x \neq 0$, то любую функцию $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{y(x)}{e^x} \cdot e^x .$$

Это является основанием метода вариации постоянной.

II) ***Метод Бернулли*****.**

Будем искать решение (8) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x) .$$

Тогда $$y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или $$u' \cdot v + u \cdot [\, v' + pv \,] = f(x) .$$

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

$$\left.\begin{aligned} &[\, v' + pv \,] = 0 . \\ &u' \cdot v = f(x) . \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Тогда (второе уравнение системы (12)).

Условия (12) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$. При этом получим

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднордное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными

§8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^{n}, \qquad (13)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1) обе части уравнения (13) разделить на y^{n},
2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Замечания.

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x) \cdot \tilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

§9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (14)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y) .$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $$u(x, y) = C .$$

$\Rightarrow$ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$
является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x, y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Способы нахождения функции $u(x,y)$:

1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 1;

2) используя одну из следующих формул:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} \underbrace{N(x,y)}_{x-const}dy$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} \underbrace{M(x,y)}_{y-const}dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

где (x_0,y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x,y)$, $N(x,y)$.

3) методом ***интегрируемых комбинаций***.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («***интегрируемые комбинации***») и привести его таким образом к виду $du(x,y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln|x|\right),$$

$$xdy + ydx = d(xy), \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

§10. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ *называется* ***интегрирующим множителем*** *уравнения* $M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = 0,$ (14) *если после его умножения на* $\mu(x,y)$ *левая часть уравнения становится полным дифференциалом некоторой функции.*

Пусть функции $M(x\,,y)$, $N(x\,,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ТЕОРЕМА 1 (о существовании интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$).

Пусть

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi, \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\psi.$$

1) *Если* $\varphi = \varphi(x)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(x)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\varphi(x);$$

2) *Если* $\psi = \psi(y)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(y)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\psi(y).$$