

§2. Определители

1. Вспомогательные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть n – натуральное число. **Факториалом** числа n (обозначают: $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е.
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Кроме того, факториал числа 0 полагают равным 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расположение n чисел в любом порядке называется **перестановкой** этих чисел.

Пусть дана некоторая перестановка n различных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют **инверсию** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$.

Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется **числом инверсий в перестановке**.

2. Определение определителя

Пусть $A=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определителем матрицы A (определителем порядка n)* называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) *каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца;*
- 2) *слагаемое берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число. В противном случае слагаемое берется со знаком «минус».*

Определитель матрицы A обозначают $|A|$, $\det A$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{\alpha_1\beta_1} \cdot a_{\alpha_2\beta_2} \cdot \dots \cdot a_{\alpha_n\beta_n}$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называются соответственно **элементами, строками, столбцами определителя** матрицы.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений. Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали. Т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

3. Свойства определителей

- 1) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.
- 2) При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
- 3) Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Доказать самостоятельно

- 4) Если все элементы k -й строки определителя $|\mathbf{A}|$ являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей $|\mathbf{A}_1|$ и $|\mathbf{A}_2|$, у которых все строки кроме k -й совпадают со строками определителя $|\mathbf{A}|$, а k -я строка в определителе $|\mathbf{A}_1|$ состоит из первых слагаемых, а в определителе $|\mathbf{A}_2|$ – из вторых слагаемых.

Доказать самостоятельно

5) Определитель равен нулю если:

- а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;
- б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);
- в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);
- г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Доказать самостоятельно

Замечание. i -ю строку (i -й столбец) определителя $|\mathbf{A}|$ называют линейной комбинацией его строк (столбцов) i_1, i_2, \dots, i_k с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, если каждый элемент i -й строки (столбца) является линейной комбинацией соответствующих элементов строк (столбцов) i_1, i_2, \dots, i_k с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Т.е.

$$a_{ij} = \lambda_1 \cdot a_{i_1j} + \lambda_2 \cdot a_{i_2j} + \dots + \lambda_k \cdot a_{i_kj}, \quad j = \overline{1, n}$$

$$(a_{ji} = \lambda_1 \cdot a_{ji_1} + \lambda_2 \cdot a_{ji_2} + \dots + \lambda_k \cdot a_{ji_k}, \quad j = \overline{1, n})$$

6) Критерий равенства нулю определителя

Определитель равен нулю \Leftrightarrow хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

7) *Определитель не изменится, если к каждому элементу i -й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k -й строки (столбца), умноженный на число $\alpha \neq 0$.*

Доказать самостоятельно

8) *Если \mathbf{A} и \mathbf{B} – квадратные матрицы порядка n , то существует \mathbf{AB} и \mathbf{BA} , причем $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.*

Доказать на определители второго порядка

4. Теорема Лапласа и ее следствие

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$.

Выберем в \mathbf{A} произвольно k строк: i_1, i_2, \dots, i_k

и k столбцов: j_1, j_2, \dots, j_k .

Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов составим определитель M_k :

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Определитель M_k называют **минором k -го порядка матрицы \mathbf{A}** .

Частные случаи:

а) любой элемент матрицы – минор первого порядка;

б) определитель квадратной матрицы порядка n – ее минор порядка n .

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n , то есть
Выберем в \mathbf{A} минор M_k (строки: i_1, \dots, i_k , столбцы: j_1, \dots, j_k).
Вычеркнем из матрицы \mathbf{A} строки и столбцы, из элементов
которых состоит минор M_k .

Определитель M_k^* , составленный из оставшихся элементов
матрицы \mathbf{A} , называется *дополнительным минором к минору*
 M_k .

Число $A_k = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} \cdot M_k^*$ называется *алгебраи-*
ческим дополнением минора M_k .

Частный случай:

дополнительный минор элемента a_{ij} (его обозначают M_{ij}) – это определитель порядка $n - 1$, полученный из определителя $|\mathbf{A}|$ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (его обозначают A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ТЕОРЕМА (Лапласа). Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов) (где $1 \leq k \leq n-1$). Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k -го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Лапласа). Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (3)$$

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (теоремы Лапласа). Сумма произведений элементов i -й строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов k -й строки (столбца) этого определителя равна нулю. Т.е.

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (5)$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (6)$$