Лектор: Янущик Ольга Владимировна

Литература

- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*
- Ефимов Н.В. *Краткий курс аналитической геометрии*
- Шерстнева А.И., Янущик О.В., Пахомова Е.Г. Лекции по высшей алгебре

- Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*
- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. *Сборник задач по линейной алгебра и аналитической геометрии*
- Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. *Руководство к решению задач по аналитической геометрии*
- Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.
- Терехина Л.И., Фикс И.И. Учебное пособие., «Высшая математика» ч.1,— Томск, Изд. ТПУ, 2004 – 2009 г.г.

Глава I. Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая линейные пространства и подпространства, линейные операторы, линейные, билинейные и квадратичные функции на линейных пространствах

§ 1. Матрицы и действия над ними

1. Определение и некоторые виды матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Матрицей размера*** *$m \times n$ называется таблица, образованная из элементов некоторого множества (например, чисел или функций) и имеющая m строк и n столбцов.*

Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***.

Если $m = n$, то матрицу называют ***квадратной, порядка n***.

Элементы, из которых составлена матрица, называются ***элементами матрицы***.

Например, a_{24} –

a_{13} –

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \ (i, j = \overline{1,n})$$

Две матрицы **A** и **B** считаются ***равными***, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в **A** и **B** на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Некоторые частные случаи матриц

1) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})$, размера $m \times 1$ называют ***матрицей-столбцом длины*** m

2) Матрицу $\mathbf{A} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) = (a_{1i})$, размера $1 \times n$ называют ***матрицей-строкой длины*** n

3) ***Нулевой*** матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij}),\ (i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n})$

Элементы $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{\mathrm{kk}}$ (где $\mathrm{k} = \min\{\mathrm{m,n}\}$) будем называть ***элементами главной диагонали матрицы***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется ***единичной***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначают: $\mathbf{E}$ или $\mathbf{E}_{\mathrm{n}}$.

5) Пусть $\mathbf{A} = (a_{\mathrm{ij}})$ – квадратная матрица порядка n. Элементы $a_{1\mathrm{n}}, a_{2,\mathrm{n}-1}, a_{3,\mathrm{n}-2}, \ldots, a_{\mathrm{n}1}$ будем называть ***элементами побочной диагонали матрицы***.

Квадратные матрицы, у которых все элементы ниже (выше) главной или побочной диагонали равны нулю, называются ***треугольными*** :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & 0 \\ b_{31} & \ldots & b_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ 0 & \ldots & d_{3,n-2} & d_{3,n-1} & d_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{n,n-2} & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$$

6) Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть ***трапециевидной***, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Линейные операции над матрицами

1) Умножение матрицы на число;

2) Сложение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением матрицы*** $\mathbf{A}=(a_{ij})$ ***на число*** α *называется такая матрица* $\mathbf{B}=(b_{ij})$, *элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы* **A** *на число* α, т.е. $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Обозначают: $\alpha\cdot\mathbf{A}$, $\alpha\mathbf{A}$.

Частный случай: $(-1)\cdot\mathbf{A}$ – ***противоположная матрице*** **A**,

Обозначают $-\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\alpha_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix},$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой двух матриц*** **A**=(a_{ij}) *и* **B**=(b_{ij}) *одинакового размера, называется такая матрица* **C**=(c_{ij}), *элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц* **A** и **B**, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Обозначают: **A+B**

Частный случай: **A+(–B)** – ***разность матриц*** **A** и **B.**

Обозначают: **A–B**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix},$$

Свойства линейных операции над матрицами

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (коммутативность сложения матриц)
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (ассоциативность сложения матриц)
3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$
5) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$ (ассоциативность относительно умножения чисел)
6) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел)
7) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц)
8) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

<u>3. Нелинейные операции над матрицами</u>

1) Умножение двух матриц;

2) Транспонирование матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* **A**=(a_{1i}) и **B**=(b_{i1}) – *матрица-строка и матрица-столбец одинаковой длины* n. ***Произведением матрицы-строки* A *на матрицу-столбец* B** *называется число c, равное сумме произведений их соответствующих элементов, т.е.*

$$c = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} \ .$$

Пример.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* **A**=(a_{ij}) – *матрица размера* $m \times n$, **B**=(b_{ij}) – *матрица размера* $n \times$ k *(т.е. количество столбцов в матрице* **A** *совпадает с количеством строк матрицы* **B***).* ***Произведением матрицы* A *на матрицу* B** *называется матрица* **C** =(c_{ij}) *размера* $m \times k$ *такая, что каждый ее элемент* c_{ij} *является произведением* *i-й* *строки матрицы* **A** *на* *j-й столбец матрицы* **B**, *т.е.*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \,.$$

Обозначают: **A** ·**B**, **AB.**

Пример

Свойства операции умножения матриц

1) $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$

2) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность умножения матриц)

$$\left.\begin{array}{l} 3)\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \\ 4)\,\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB} \end{array}\right\} -$$ дистрибутивность умножения

матриц относительно сложения матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– матрица размера* $m \times n$. *Матрица размера* $n \times m$, *полученная из* $\mathbf{A}$ *заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется* ***транспонированной*** *к* $\mathbf{A}$ *и обозначается* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Операция нахождения матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ *называется* ***транспонированием*** *матрицы* $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования матриц

1) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$;

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$;

3) $(\alpha\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Определение. К элементарным преобразованиям строк (столбцов) матрицы

1. Замена строк столбцами, а столбцы соответствующими строками.
2. Перестановка строк или столбцов матрицы.
3. Вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю.
4. Умножение строки матрицы на числа не равное нулю.
5. Прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующие элементы другой строки, умноженное на число, отличное от нуля.