

# Глава III. Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

**Линией на плоскости** называют геометрическое место точек  $M(x;y)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0, \quad (1)$$

где  $F(x,y)$  – многочлен степени  $n$ .

**Поверхностью** называют геометрическое место точек  $M(x;y;z)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z) = 0, \quad (2)$$

где  $F(x,y,z)$  – многочлен степени  $n$ .

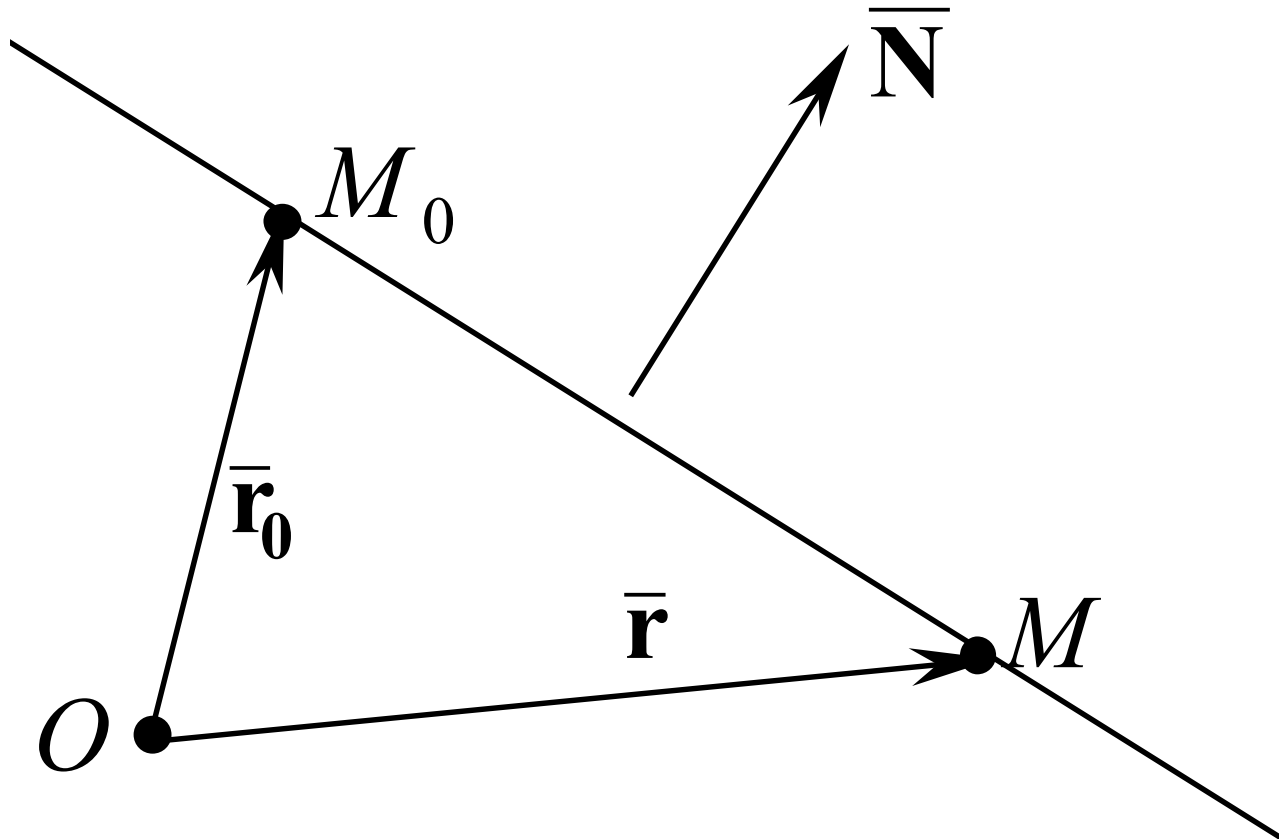
**Линией в пространстве** называют пересечение двух поверхностей.

Уравнения (1) и (2) называют **общими уравнениями линии на плоскости и поверхности** соответственно. Степень многочлена  $F(x,y)$  ( $F(x,y,z)$ ) называют **порядком линии (поверхности)**.

## § 1. Прямая на плоскости

### 1. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование

**ЗАДАЧА 1.** Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$ , перпендикулярно вектору  $\bar{N} = \{A, B\}$



Уравнения  $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$  (3) и  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$  называют *уравнением прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно вектору  $\bar{\mathbf{N}} = \{A, B\}$*  (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения  $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + C = 0$  и  $Ax + By + C = 0$  (4) называют *общим уравнением прямой на плоскости* (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

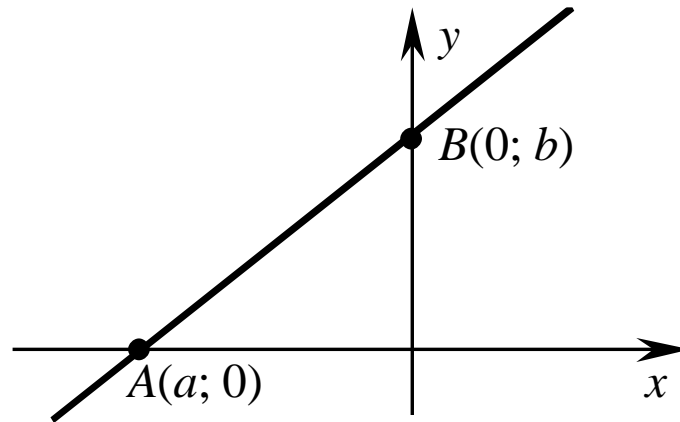
- 1) Прямая на плоскости является линией первого порядка. В общем случае она задается уравнением  $Ax + By + C = 0$ , где  $A, B, C$  – числа.
- 2) Коэффициенты  $A$  и  $B$  не обращаются в нуль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

Вектор, перпендикулярный прямой, называют *нормальным вектором* этой прямой.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ.

Если в уравнении  $Ax + By + C = 0$  все коэффициенты  $A, B$  и  $C$  отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют **неполным**.

- 1) Пусть общее уравнение прямой – полное. Тогда его можно записать в виде
- $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5)$$

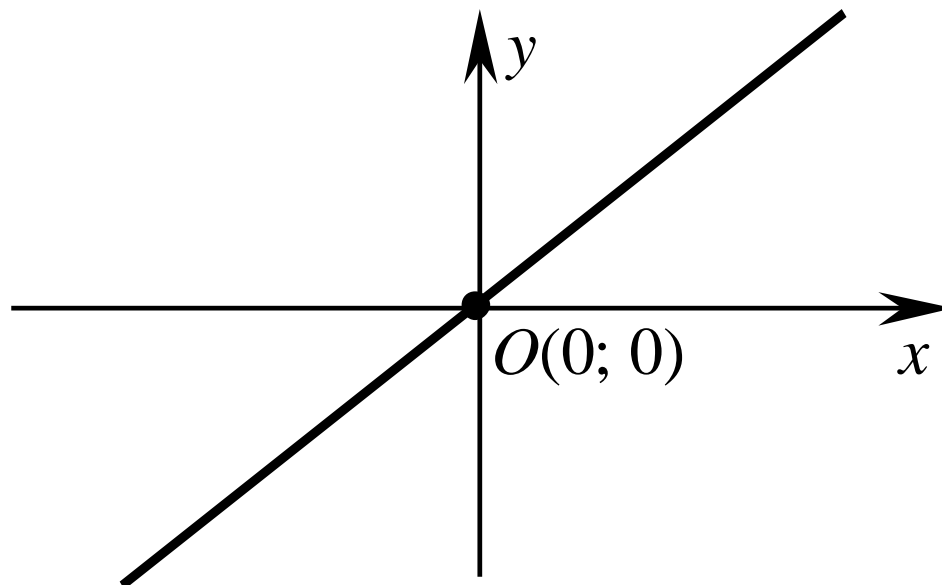


С геометрической точки зрения  $a$  и  $b$  – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Уравнение (5) называют **уравнением прямой в отрезках**.

2) Пусть в общем уравнении прямой коэффициенты  $A$  и  $B$  – ненулевые, а  $C = 0$ , т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0.$$

Такая прямая проходит через начало координат  $O(0;0)$ .

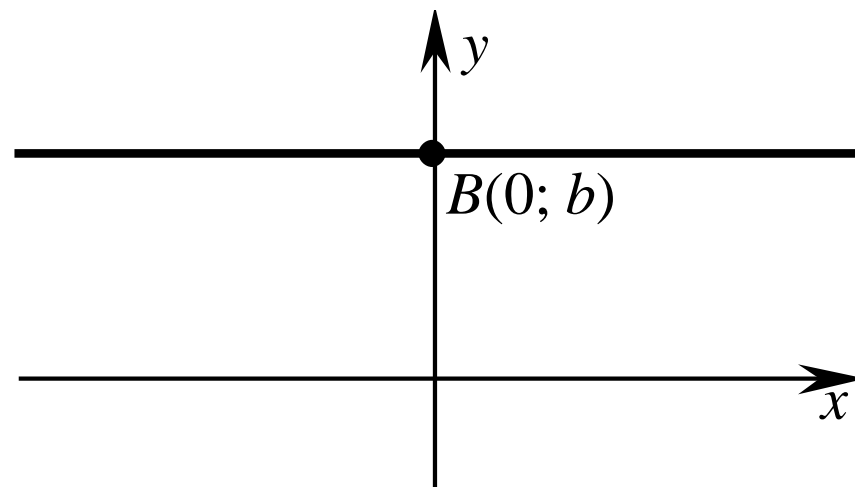
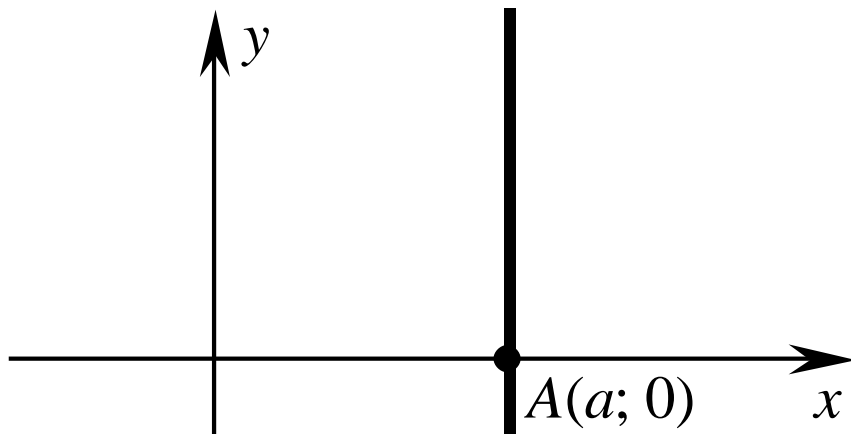


3) Пусть в общем уравнении прямой один из коэффициентов  $A$  или  $B$  – нулевой, а  $C \neq 0$ , т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad By + C = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b.$$



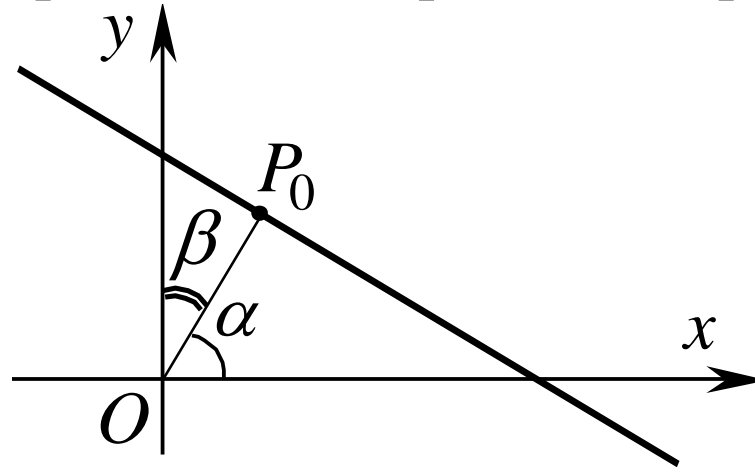
4) Пусть в общем уравнении прямой  $C = 0$  и один из коэффициентов  $A$  или  $B$  тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид  $Ax = 0$  или  $By = 0$ .

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = 0 \quad (\text{уравнения координатной оси } Oy)$$

и  $y = 0$  (уравнения координатной оси  $Ox$ ).

*Замечание.* Пусть прямая  $\ell$  не проходит через  $O(0;0)$ .



Обозначим:

1)  $P_0(x_0; y_0)$  – основание перпендикуляра, опущенного на  $\ell$  из начала координат,

2)  $\bar{\mathbf{n}} = \{\overline{\cos \alpha}, \overline{\cos \beta}\}$  – орт вектора  $\overline{\mathbf{OP}_0}$ .

3)  $p = |\overline{\mathbf{OP}_0}|$  – расстояние от начала координат до прямой  $\ell$

Тогда уравнение  $\ell$  можно записать в виде

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + C = 0,$$

где  $C = -p$  (доказать самим).

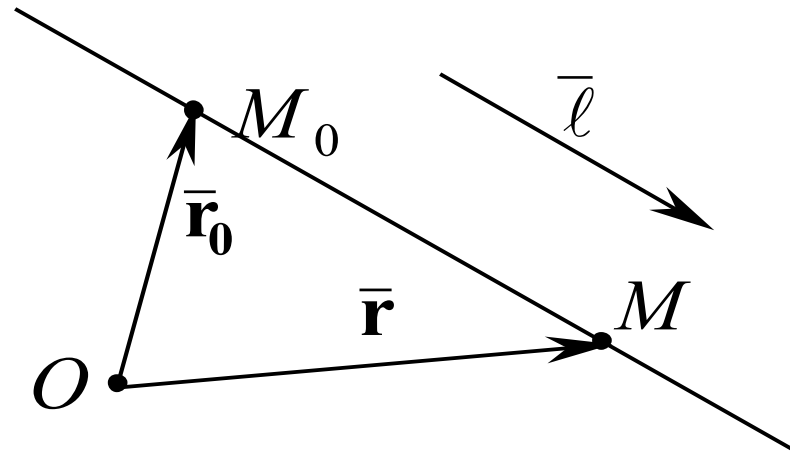
Этот частный случай общего уравнения прямой называется ***нормальным уравнением прямой.***

## 2. Другие формы записи уравнения прямой на плоскости

### 1) Параметрические уравнения прямой

**ЗАДАЧА 2.** Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$ , параллельно вектору  $\bar{\ell} = \{m; n\}$

Вектор, параллельный прямой, называют **направляющим вектором** этой прямой.



Уравнение  $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{\ell}$  и систему уравнений 
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases}$$

называют **параметрическими уравнениями прямой** (в векторной и координатной форме соответственно).



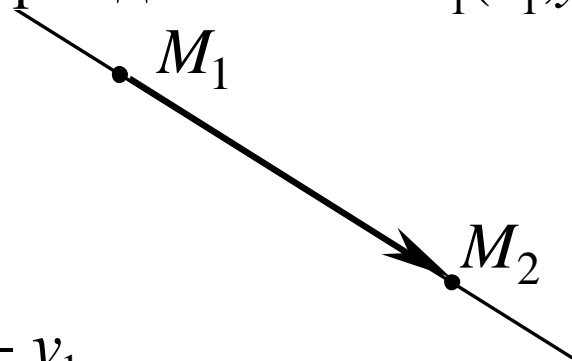
## 2) Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть в задаче 2 вектор  $\vec{l}$  не параллелен ни одной из координатных осей (т.е.  $m \neq 0$  и  $n \neq 0$ ).

Уравнение  $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$  называют **каноническим уравнением прямой на плоскости**.

## 3) Уравнение прямой, проходящей через две точки – частный случай канонического уравнения прямой.

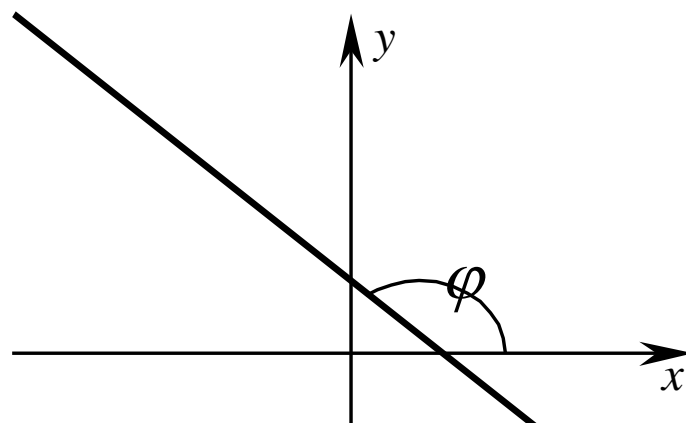
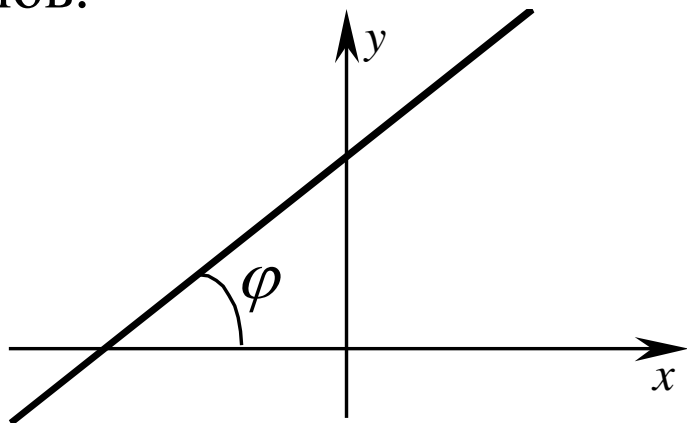
Пусть прямая проходит через две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ .



Уравнение  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$  называют **уравнением прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$** .

#### 4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая  $\ell$  не параллельна оси  $Ox$ . Тогда она пересекается с  $Ox$ , образуя при этом две пары вертикальных углов.

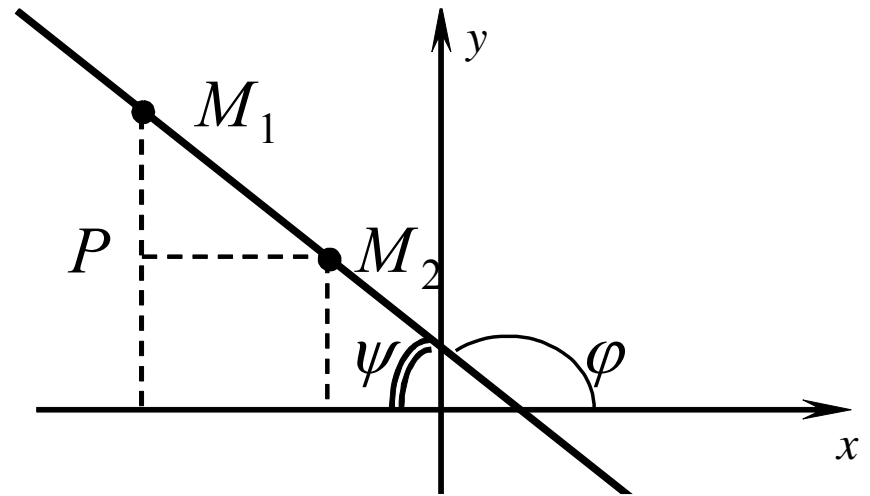
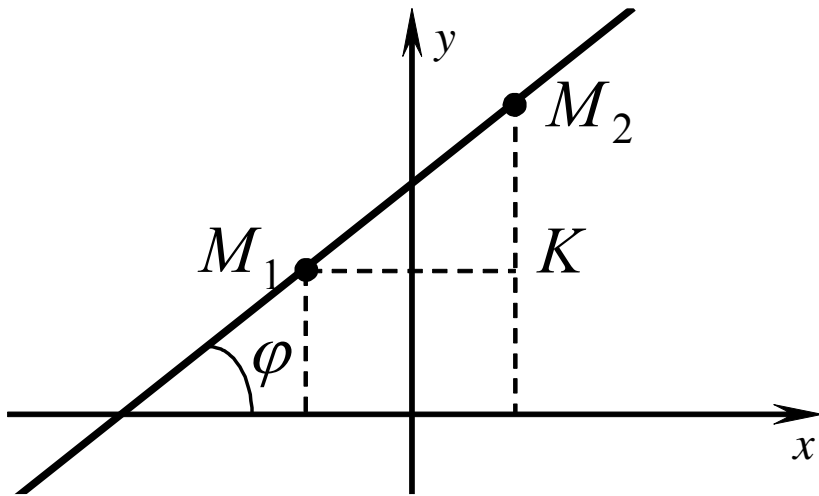


Угол  $\varphi$ , отсчитываемый от оси  $Ox$  к прямой  $\ell$  против часовой стрелки, называют ***углом наклона прямой  $\ell$  к оси  $Ox$*** .

Число  $k = \operatorname{tg}\varphi$  (если оно существует, т.е. если прямая  $\ell$  не параллельна оси  $Oy$ ) называют ***угловым коэффициентом прямой***.

Для прямой, параллельной оси  $Ox$ , угол наклона прямой к оси  $Ox$  считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой  $k = \operatorname{tg}0 = 0$ .

Пусть прямая  $\ell$  не параллельна оси  $Ox$  и  $Oy$  и проходит через точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  (где  $x_1 < x_2$ ). Найдём угловой коэффициент этой прямой.



Получили:  $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Уравнение прямой, проходящей через две точки перепишем в

виде:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Уравнение  $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$  – это **уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1)$  и имеющей угловой коэффициент  $k$ .**

Перепишем это уравнение в виде  $y = kx + b$  (где  $b = y_1 - kx_1$ ). Его называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. С геометрической точки зрения  $b$  – отрезок, отсекаемый прямой на оси  $Oy$ .

**Замечание.** Уравнение прямой с угловым коэффициентом было получено в предположении, что прямая не параллельна оси  $Ox$  и  $Oy$ . Для прямой, параллельной  $Ox$  общее уравнение можно рассматривать как уравнение с угловым коэффициентом. Действительно, уравнение такой прямой

$$y = b \quad \text{или} \quad y = 0 \cdot x + b,$$

где  $k = 0$  – угловой коэффициент прямой.

### 3. Взаимное расположение прямых на плоскости

На плоскости две прямые могут:

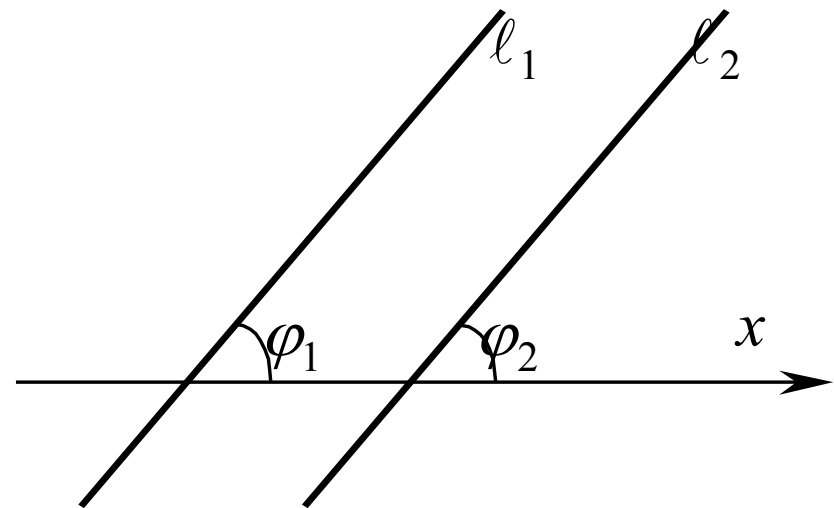
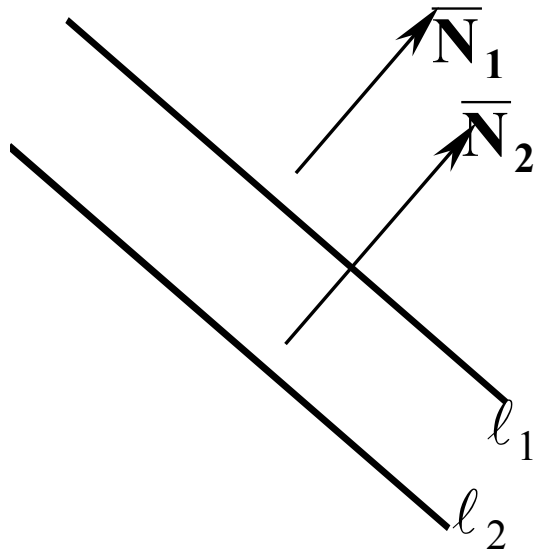
а) быть параллельны, б) пересекаться.

Пусть уравнения прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  имеют вид:

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_1x + b_1$$

$$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_2x + b_2$$

1) Пусть прямые параллельны:



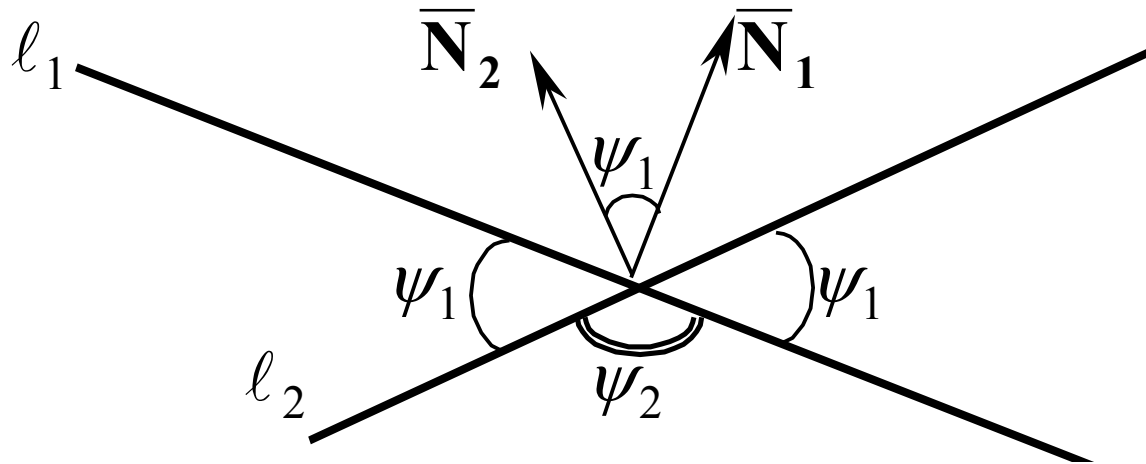
Получаем, что прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

или их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2.$$

2) Пусть прямые пересекаются

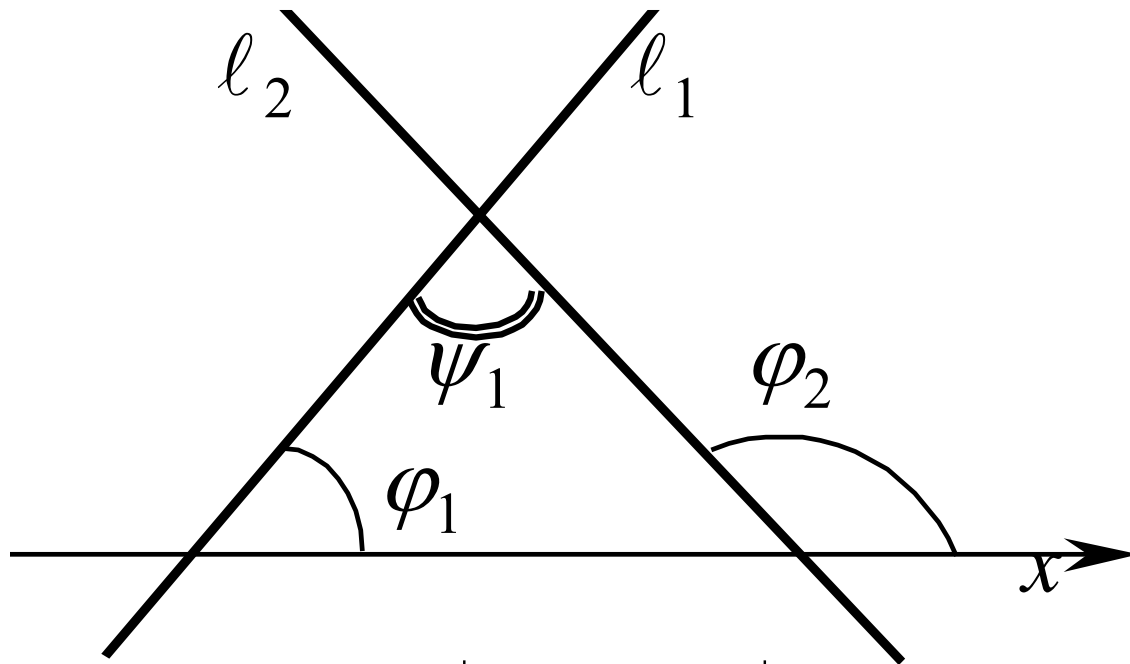


$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2)|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

$$(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad -$$

***критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями.***



$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad -$$

***критерий перпендикулярности прямых, имеющих угловые коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ .***

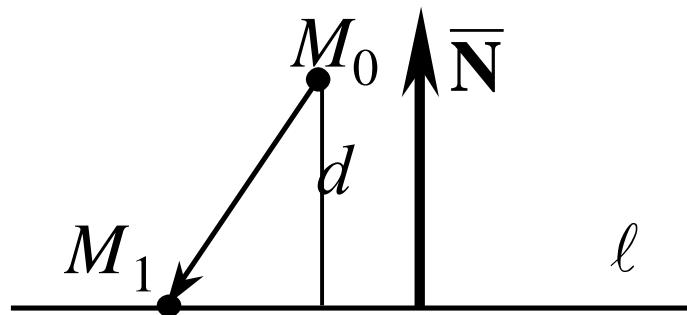


## 4. Расстояние от точки до прямой

**ЗАДАЧА 3.** Пусть прямая  $\ell$  задана общим уравнением  
 $Ax + By + C = 0$ ,

$M_0(x_0; y_0)$  – точка, не принадлежащая прямой  $\ell$ .

Найти расстояние от точки  $M_0$  до прямой  $\ell$ .



$$d = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_0M_1})|}{|\bar{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$