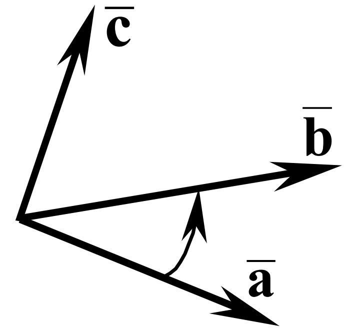
# 2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется правой, если поворот от вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *к вектору* $\bar{\mathbf{b}}$ *на меньший угол виден из конца вектора* $\bar{\mathbf{c}}$ *против часовой стрелки.*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторным произведением двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{c}}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, *где* $\varphi$ *– угол между векторами* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$*;*

2) *вектор* $\bar{\mathbf{c}}$ *ортогонален векторам* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$*;*

3) *тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *– правая.*

*Если хотя бы один из векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}$ *нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.*

Обозначают $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$ .

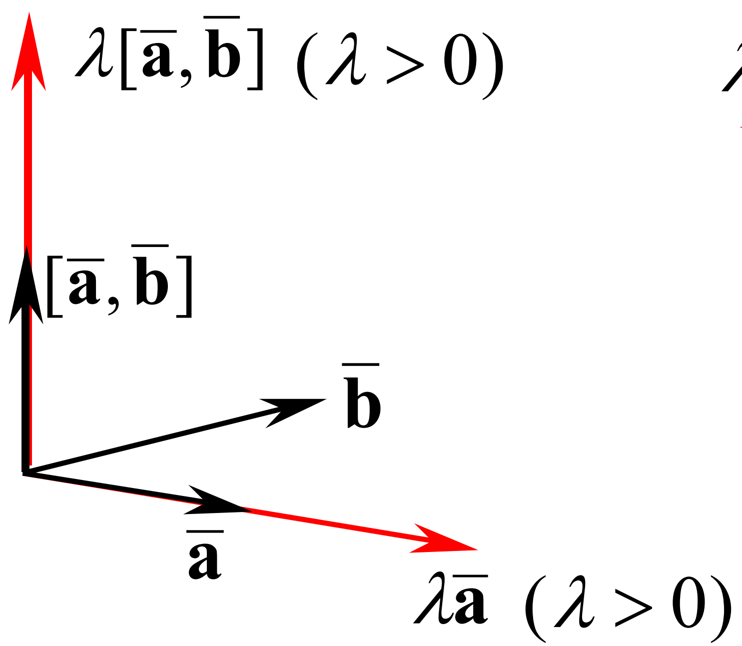
# СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

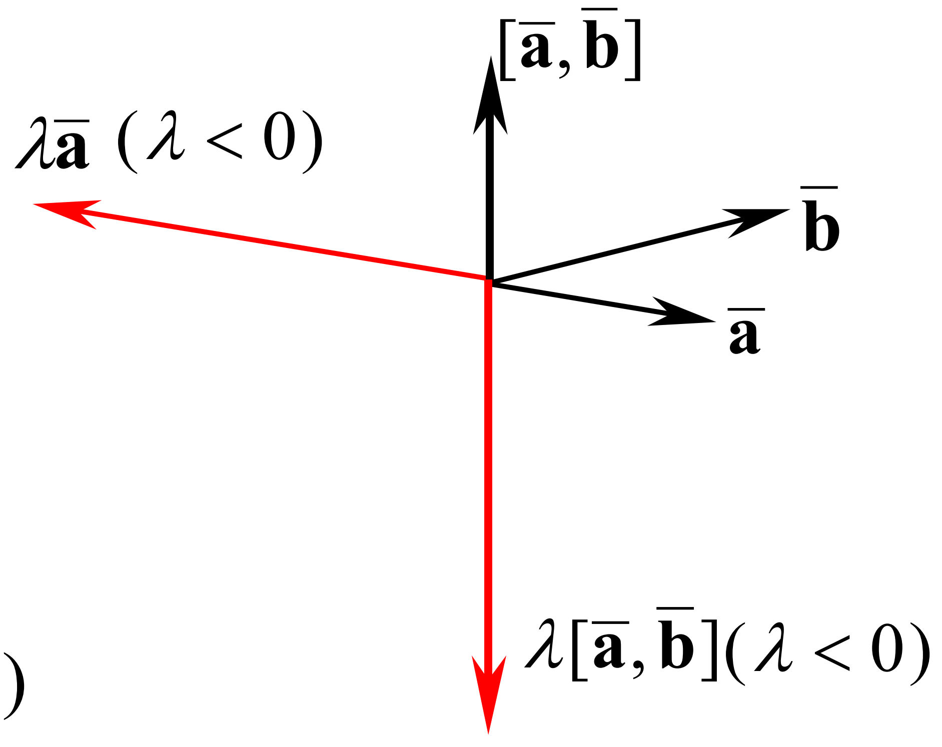
1) *При перестановке векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *их векторное произведение меняет знак*, т.е.

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = -[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}].$$

2) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения*. Т.е.

$$[\lambda\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = [\overline{\mathbf{a}}, \lambda\overline{\mathbf{b}}] = \lambda[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}].$$



3) *Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно: $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$,

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2].$$

4) *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору* (Критерий коллинеарности векторов).

5) *Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах* (Геометрический смысл векторного произведения).

6) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, *то*

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

7) (Механический смысл векторного произведения). *Если вектор* $\bar{\mathbf{F}}$ *это сила, приложенная к точке* $M$, *то векторное произведение* $\left[\overline{\mathbf{OM}}, \bar{\mathbf{F}}\right]$ *представляет собой момент силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *относительно точки* $O$.

# 3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением трех векторов* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *на векторное произведение векторов* $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$, *т.е.* $(\overline{\mathbf{a}},[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}])$.

Обозначают: $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})$ или $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{c}}$ .

## СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) *При циклической перестановке векторов* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *их смешанное произведение не меняется*, т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})=(\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}})=(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}).$$

2) *При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.*

3) *Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения*. Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \lambda\bar{\mathbf{c}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) .$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) ,$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) ,$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_2) .$$

5) *Ненулевые векторы* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю* (Критерий компланарности векторов).

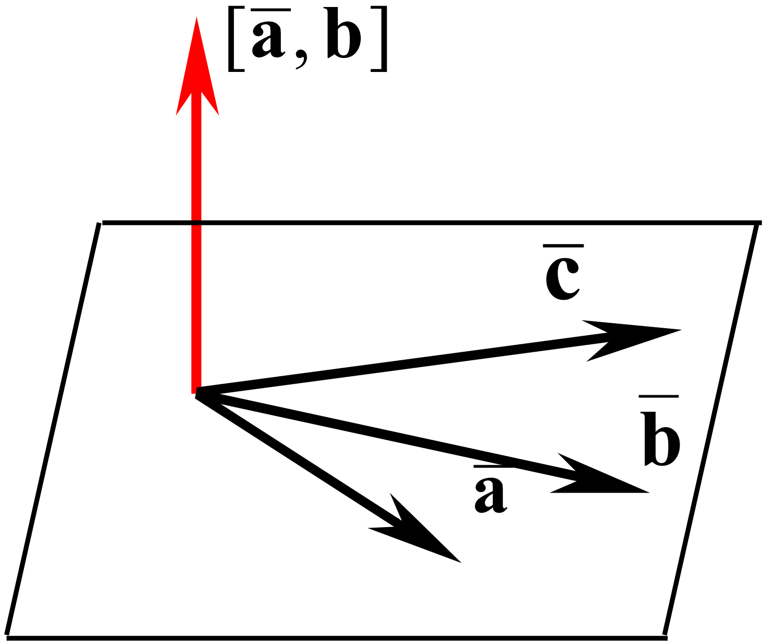



рис. 1

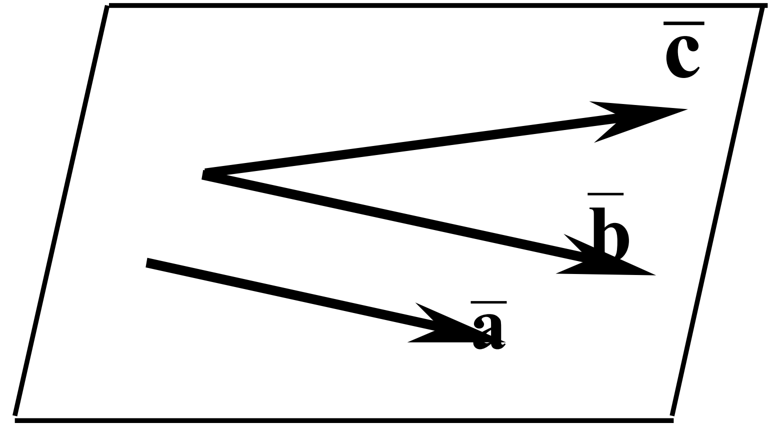



рис. 2

6) *Если* $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})>0$, *то векторы* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *образуют правую тройку. Если* $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})<0$, *то тройка векторов* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *– левая.*

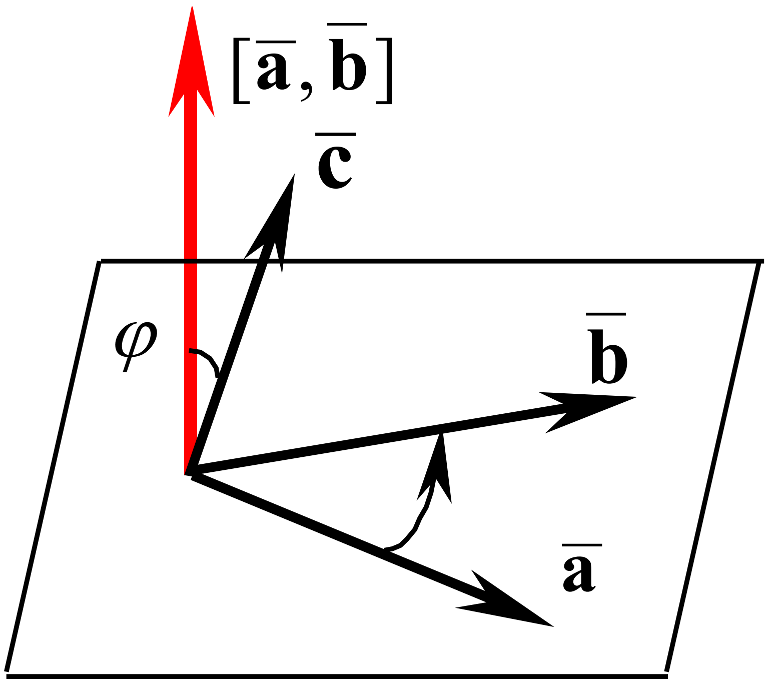



рис. 3

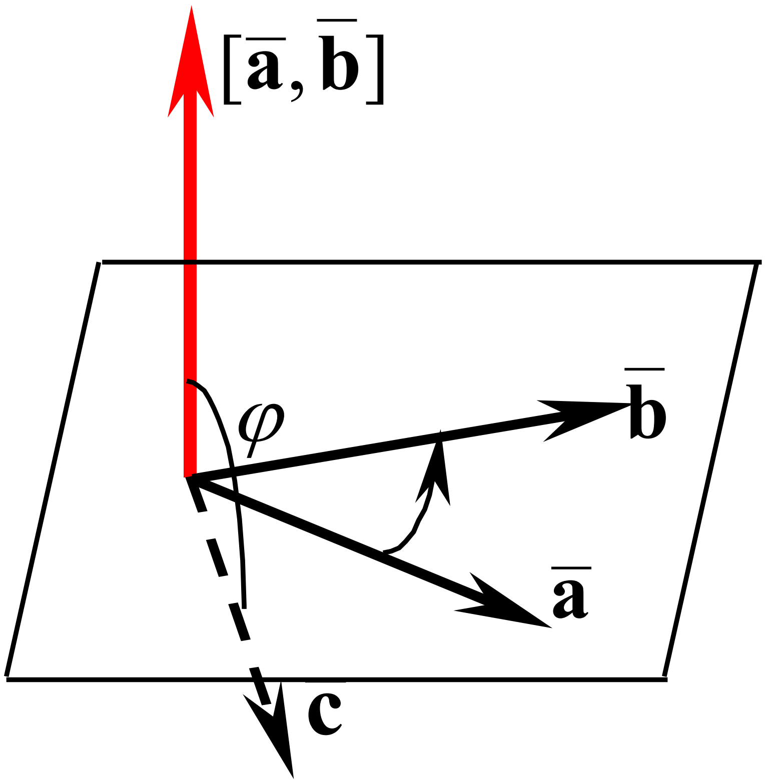



рис.4

7) *Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах* (Геометрический смысл смешанного произведения).

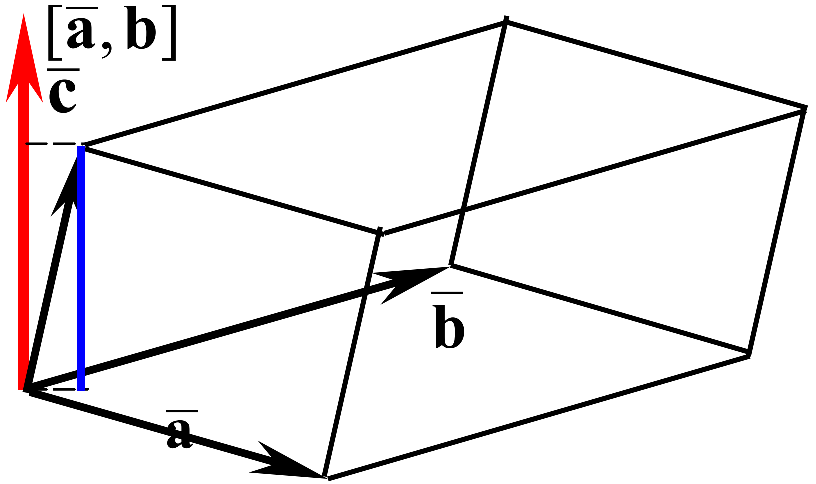



рис. 5

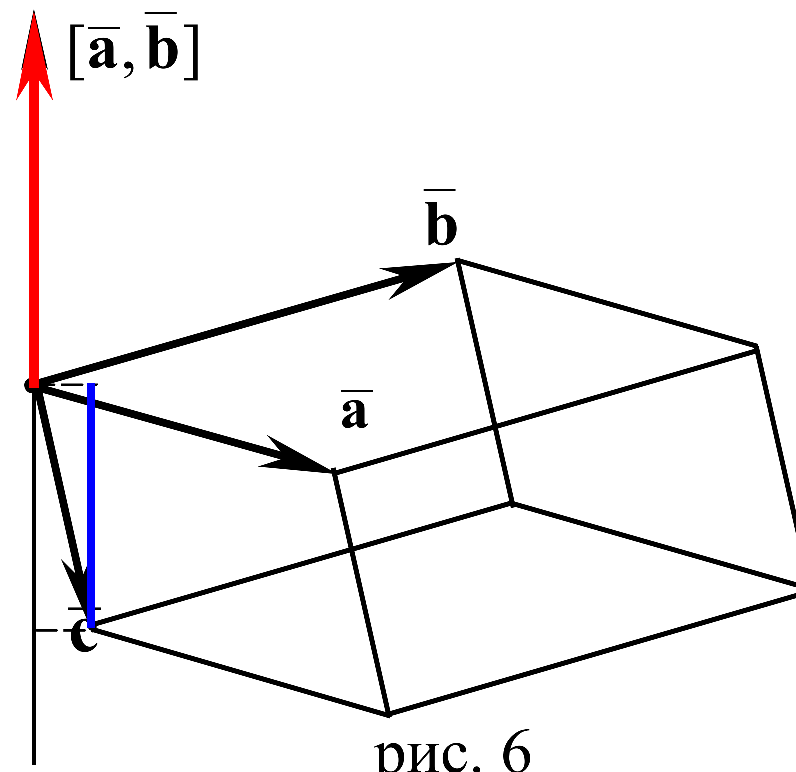



рис. 6

8) (Следствие свойства 7). *Объем пирамиды, построенной на векторах* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *равен* $\frac{1}{6}$ *модуля их смешанного произведения.*

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$ *имеют координаты*: $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\overline{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\}$, *то*

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$