# 4. Координаты вектора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами этого вектора в данном базисе*.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют декартову систему координат, базисом в которой является единичные, попарно ортогональные вектора.

Говорят, что три некомпланарных вектора $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ образуют ***правую тройку,*** если с конца третьего вектора $\mathbf{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\mathbf{a}$, ко второму вектору $\mathbf{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и ***левую тройку***, если по часовой.

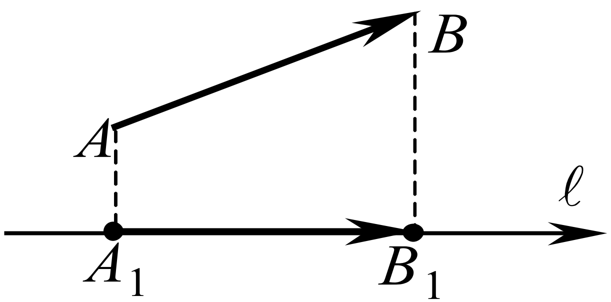
Векторы, образующие правую декартову прямоугольную систему координат, обозначают **i, j, k**.

Оси координат в этой системе координат называют соответственно осью *OX* (абсцисс), *OY* (ординат), *OZ* (аппликат)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямую, на которой выбрано направление, называют осью*.

***Проекцией точки*** $A$ на прямую (плоскость) называется основание $A_1$ перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на эту прямую.

Пусть $\ell$ – ось, $\overline{\mathbf{AB}}$ – некоторый вектор, $A_1$ и $B_1$ – ортогональные проекции на ось $\ell$ точек $A$ и $B$ соответственно.




Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем *векторной проекцией вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* $\ell$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией (ортогональной проекцией) вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* $\ell$ *называется длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на эту ось, взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* $\ell$ *сонаправлены, и со знаком минус – если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* $\ell$ *противоположно направлены.*

Обозначают: $\text{Пр}_{\ell}^{\perp}\overline{\mathbf{AB}}$, $\text{Пр}_{\ell}\overline{\mathbf{AB}}$.

ТЕОРЕМА 6. *Координаты вектора* $\bar{\mathbf{a}} \in \mathrm{V}^{(2)}$ $(\mathrm{V}^{(3)})$ *в декартовом прямоугольном базисе* **i, j** (**i, j, k**) *есть проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.*

Свойства проекций

1. $\mathit{Пр}_l\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|\cos\varphi$
2. $\mathit{Пр}_l\left(\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}\right) = \mathit{Пр}_l\bar{\mathbf{a}} + \mathit{Пр}_l\bar{\mathbf{b}}$
3. $\mathit{Пр}_l\left(\alpha\bar{\mathbf{a}}\right) = \alpha\mathit{Пр}_l\bar{\mathbf{a}}$

ТЕОРЕМА 7.

1) *Если вектор* $\overline{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, *вектор* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеет в том же базисе координаты* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, *то вектор* $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$ *будет иметь в базисе* $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ *координаты*

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\}.$$

2) *Если вектор* $\overline{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, *то для любого действительного числа* $\lambda$ *вектор* $\lambda\overline{\mathbf{a}}$ *будет иметь в том же базисе координаты* $\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\}$.

ТЕОРЕМА 8 (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме).

*Векторы* $\overline{\mathbf{a}} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ *и* $\overline{\mathbf{b}} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты – пропорциональны, т.е.*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k \; .$$

*Причем, если коэффициент пропорциональности* $k > 0$, *то векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *– сонаправлены, а если* $k < 0$ *– то противоположно направлены*

ТЕОРЕМА 9 (связь координат вектора в разных базисах).

*Пусть* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ *и* $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ *два базиса во множестве* $V^{(3)}$*. Причем имеют место равенства:*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_1 &= \tau_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{31}\bar{\mathbf{e}}_3,\\
\bar{\mathbf{f}}_2 &= \tau_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{32}\bar{\mathbf{e}}_3,\\
\bar{\mathbf{f}}_3 &= \tau_{13}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{23}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{33}\bar{\mathbf{e}}_3.
\end{aligned}$$

*Если вектор* $\bar{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$*, а в базисе* $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ *– координаты* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$*, то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B},$$

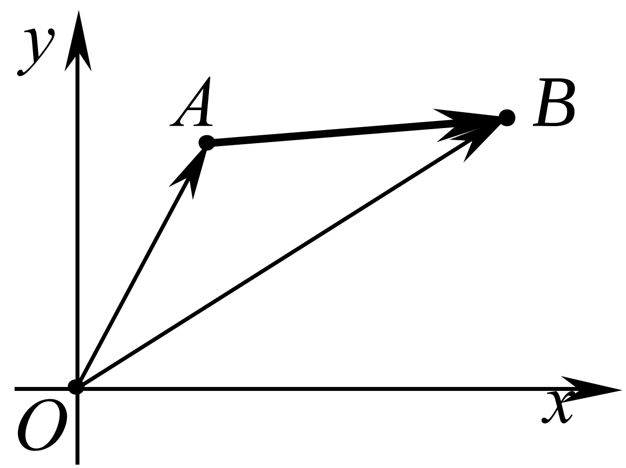
*где*
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

(матрицу **T** называют матрицей перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ ).

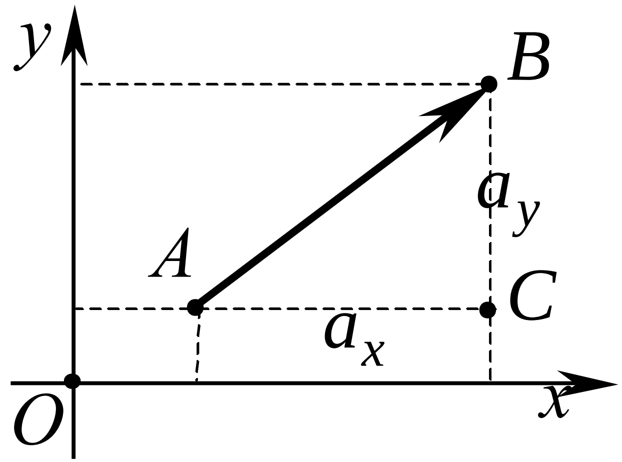
# §2. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем во множестве $V^{(3)}$ $(V^{(2)})$ декартов прямоугольный базис **i, j, k** (**i, j**).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.



ЗАДАЧА 2. Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.



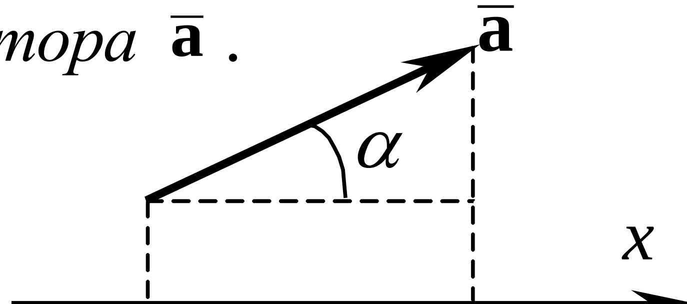

ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

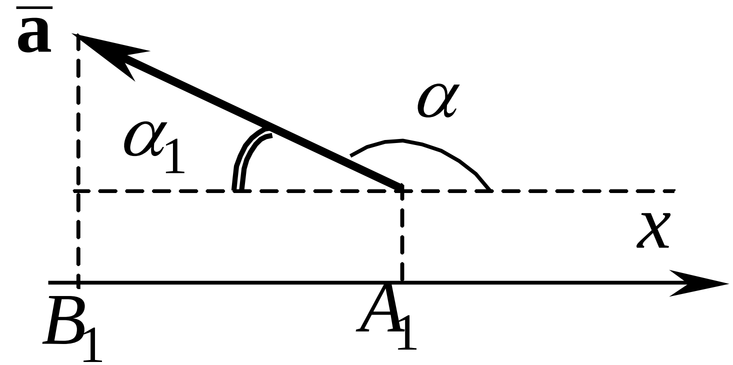
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортом вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{0}}$, *сонаправленный с вектором* $\bar{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину*.

# Геометрический смысл координат орта вектора

Будем обозначать через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\bar{\mathbf{a}}$.




К*оординаты орта вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *являются его направляющими косинусами*.

***Замечание***. Так как $\left|\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{0}}\right| = 1$ и $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{0}} = \left\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

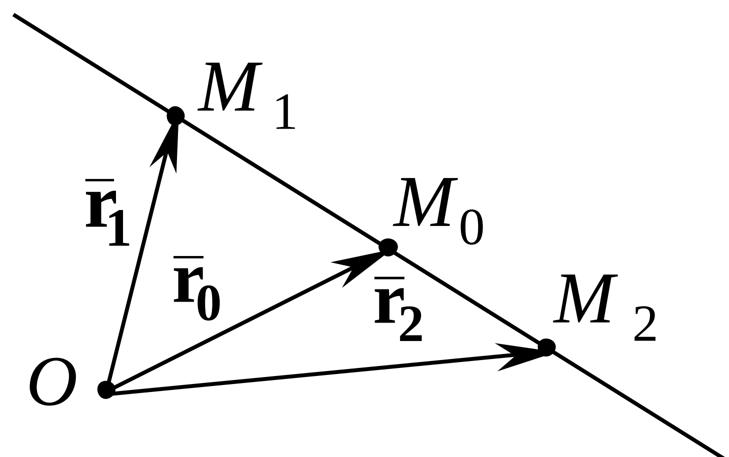
Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что точка* $M_0$ *делит отрезок* $M_1M_2$ *в отношении* $\lambda$ $(\lambda \neq -1)$ *если* $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$ .

Если $\lambda > 0$ , то точка $M_0$ лежит между точками $M_1$ и $M_2$. В этом случае говорят, что точка $M_0$ *делит отрезок* $M_1M_2$ *во внутреннем отношении*.

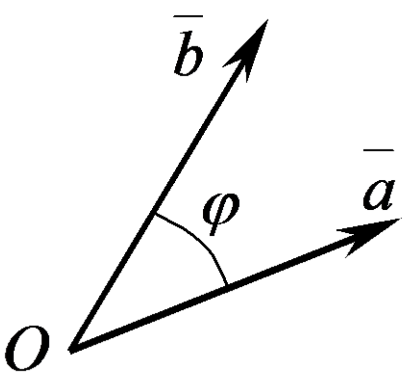
Если $\lambda < 0$ , то точка $M_0$ лежит на продолжении отрезка $M_1$ $M_2$. В этом случае говорят, что точка $M_0$ *делит отрезок* $M_1M_2$ *во внешнем отношении*.



# §3. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

## 1. Скалярное произведение векторов




ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число* $\left|\overline{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{b}}\right| \cdot \cos\varphi$.

*Если* $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{0}}$ *или* $\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведение векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

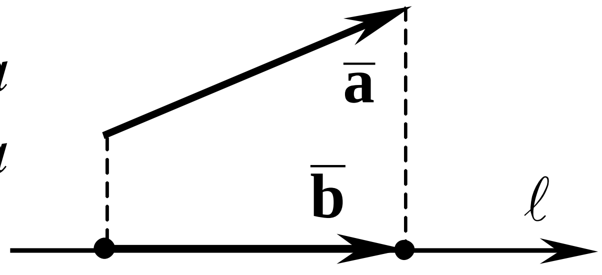
1) *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$$

2) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равно произведению длины вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на проекцию вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{a}}$ *(длины вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на проекцию* $\bar{\mathbf{a}}$ *на* $\bar{\mathbf{b}}$*).*

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = \left|\bar{\mathbf{a}}\right| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}} = \left|\bar{\mathbf{b}}\right| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}$$

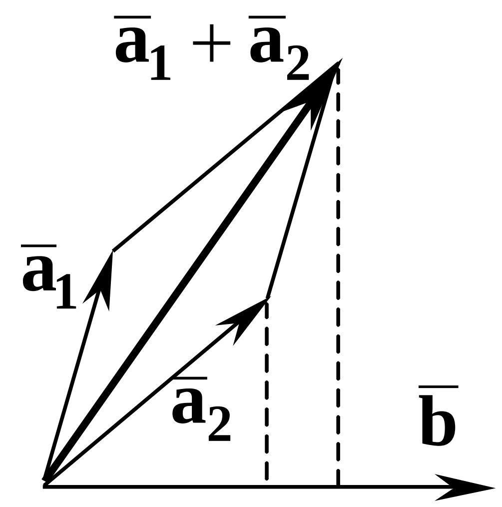
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется проекция вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось, определяемую вектором* $\bar{\mathbf{b}}$.




3) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы.* Т.е.




$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}})$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2)$$

5) *Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины.* Т.е. $(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{a}})=|\,\overline{\mathbf{a}}\,|^2$

6) *Ненулевые векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* (критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x;b_y;b_z\}$,

то
$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) *Если под действием постоянной силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* $M_1$ *в* $M_2$ *, то работа силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *будет равна* $A=\left(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)$ (физический смысл скалярного произведения).

9) $$\cos\varphi = \frac{(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}$$