Глава II. Векторная алгебра.

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется *векторным исчислением*.

Векторное исчисление подразделяют на *векторную алгебру* и *векторный анализ*. В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

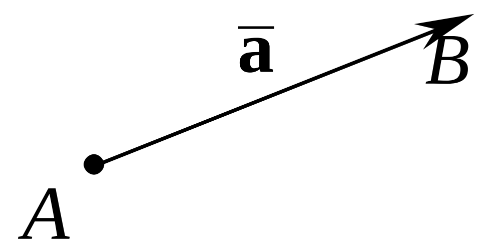
§ 1. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (или *модулем*) вектора. Обозначают: $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым.* Обозначают: $\overline{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

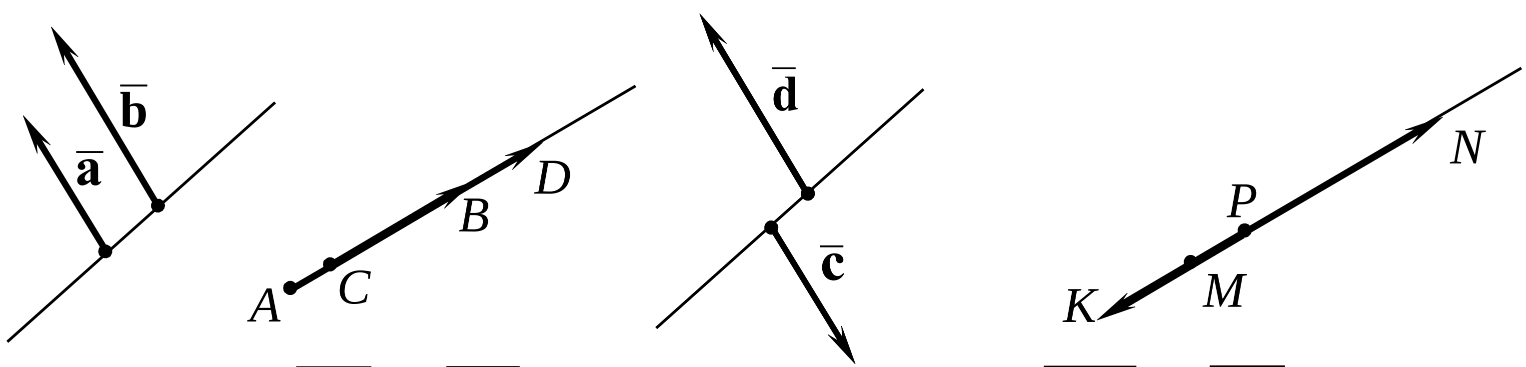
Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными* (*параллельными*).

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарные, и $\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

Если векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ – коллинеарные и их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых) или один из лучей $[AB)$ или $[CD)$ целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой), то векторы называются *сонаправленными*. В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*.

Записывают: $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ сонаправленные,

и $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



$\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$ $\overline{\mathbf{AB}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{CD}}$ $\overline{\mathbf{c}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{d}}$ $\overline{\mathbf{MN}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{PK}}$

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Все нулевые векторы считаются равными

Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными* (*ортогональными*).

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением вектора* $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ *на число* $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$, *а направление совпадает с направлением вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$.

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$, *то их произведение полагают равным* $\bar{\mathbf{0}}$.

Обозначают: $\alpha\,\bar{\mathbf{a}}$.

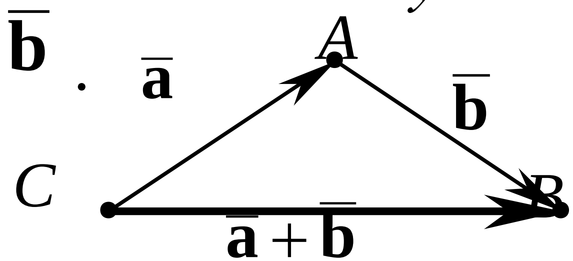
Частный случай: произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$.

Вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют *противоположным вектору* $\bar{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

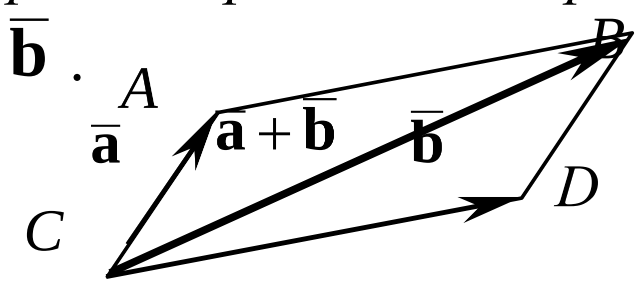
ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило треугольника). *Пусть даны два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим последовательно векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{b}}$. *Вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.



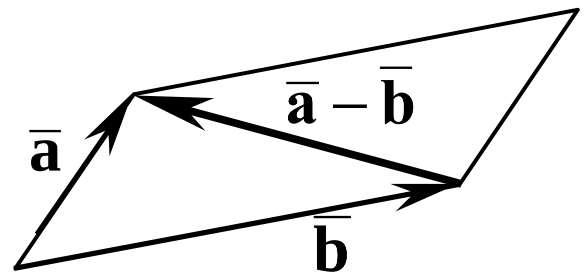
ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило параллелограмма). *Пусть даны два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$. *Суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имеющий начало в точке* C *и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\bar{\mathbf{a}}+(-\bar{\mathbf{b}})$.

Сумму $\bar{\mathbf{a}}+(-\bar{\mathbf{b}})$ называют *разностью векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ $\bar{\mathbf{b}}$ и

обозначают $\bar{\mathbf{a}}-\bar{\mathbf{b}}$.



СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

1) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);
2) $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);
3) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$;
4) $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$;
5) $\alpha(\beta\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения чисел);
6) $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \beta\overline{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);
7) $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \alpha\overline{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);
8) $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$.

3. Понятия линейной зависимости и независимости. Базис

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что векторы* $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_k$ *линейно зависимы, если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не все равные нулю и такие, что линейная комбинация*

$$\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{\mathbf{a}}_k$$

равна нулевому вектору $\bar{\mathbf{o}}$

Если равенство $\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{\mathbf{a}}_k = \bar{\mathbf{o}}$ *возможно только при условии* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_k$ *называют линейно независимыми.*

ЛЕММА 2 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов).

Векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

Замечание. Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 2.

Пусть $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Максимальное линейно независимое множество векторов в* $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) называется базисом этого множества.

Иначе говоря, векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n \in V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) образуют базис в этом множестве если выполняются два условия:

1) $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$ – линейно независимы;

2) $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$, $\bar{\mathbf{a}}$ – линейно зависимы для любого вектора $\bar{\mathbf{a}}$ из $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) .

ТЕОРЕМА 3. *Любые два базиса множества* $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) *состоят из одного и того же числа векторов.*

ЛЕММА 4 (о базисе $V^{(3)}$ и $V^{(2)}$).

1) *Базисом множества* $V^{(2)}$ *являются любые два неколлинеарных вектора*.

2) *Базисом множества* $V^{(3)}$ *являются любые три некомпланарных вектора*.

СЛЕДСТВИЕ (критерий линейной зависимости 2-х и 3-х ненулевых векторов).

1) Два ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

2) Три ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны

ТЕОРЕМА 5 (о базисе). *Каждый вектор множества* $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) *линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*