§ 4. Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ. Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

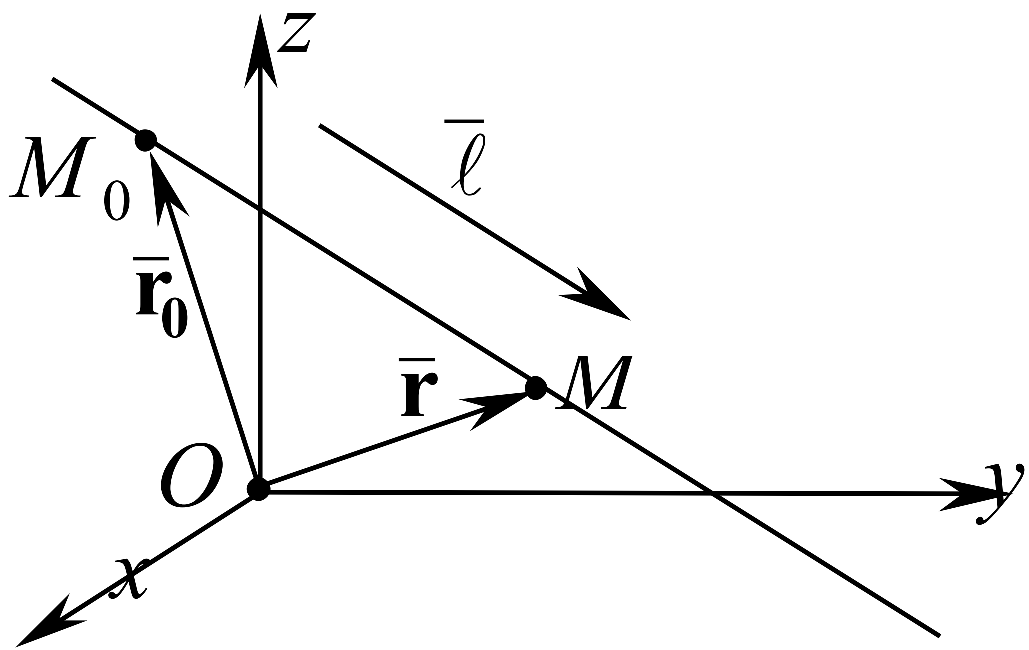
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – **ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ** уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно вектору $\overline{\ell} = \{m;\, n;\, p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.



Уравнение $$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + t\bar{\ell}\ , \qquad (2^*)$$

и систему уравнений $$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \qquad (2)$$

называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* (в векторной и координатной форме соответственно).

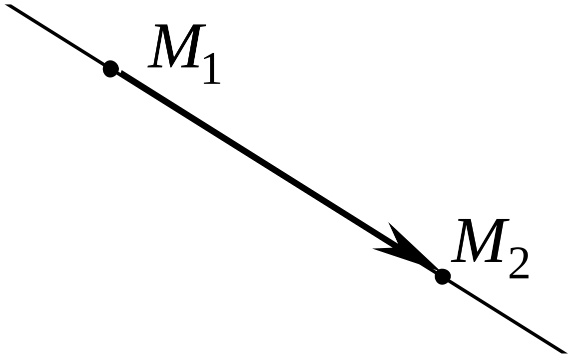
Пусть в задаче 1 вектор $\bar{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$).

Уравнения $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3)$$

называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Частным случаем канонических уравнений являются **УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ**.

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Уравнения
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4)$$

называют *уравнениями прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. **Переход от общих уравнений прямой к каноническим**

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

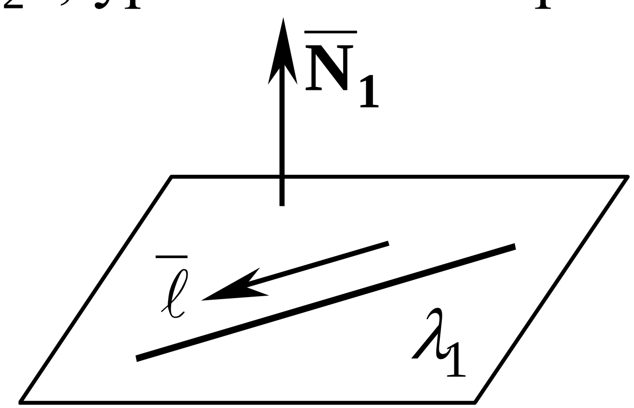
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, *необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *на прямой*.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор $\bar{\ell} = [\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2]$

где $\overline{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2, уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. **Взаимное расположение прямых в пространстве**

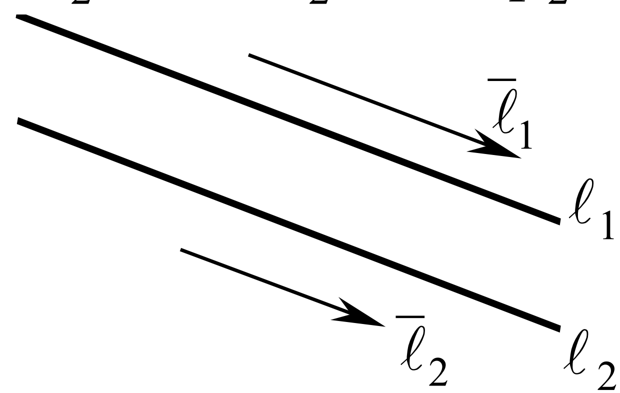
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\ell_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad \ell_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

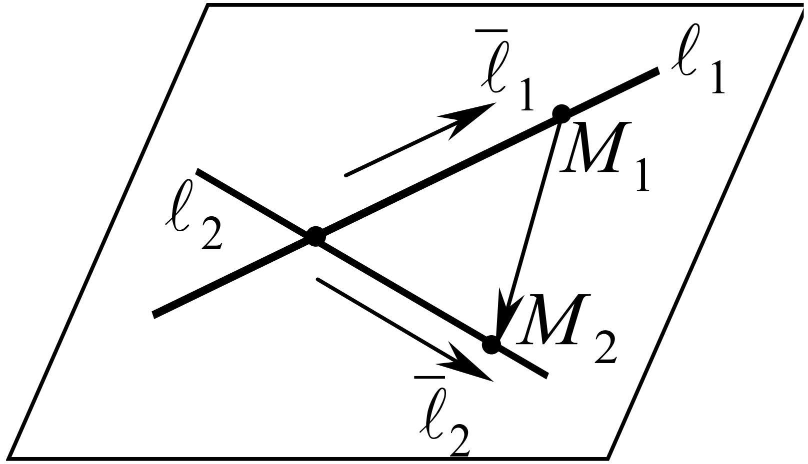
1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны:



Получаем: *прямые параллельны* $\Leftrightarrow$ *их направляющие векторы* $\overline{\ell}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\overline{\ell}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ *коллинеарные*, т.е. выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{6}$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются:



Получили: *прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ *они не параллельны и для них выполняется условие*

$$\left(\overline{\mathbf{M_1M_2}}, \overline{\ell}_1, \overline{\ell}_2\right) = 0, \qquad (7^*)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (6) и (7) ((7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

1) параллельные прямые $\rightarrow$ расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?

2) пересекающиеся прямые $\rightarrow$ а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?

3) скрещивающиеся прямые $\rightarrow$ а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны две прямые:

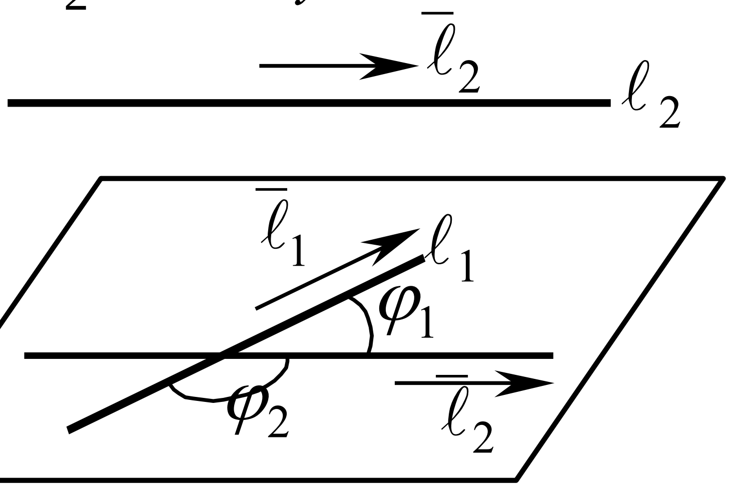
$$\ell_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

$\overline{\ell}_i = \{m_i;\, n_i;\, p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,

$M_i(x_i,\, y_i,\, z_i) \in \ell_i \quad (i = 1,2).$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* ℓ_1 *и* ℓ_2 *называется угол между прямой* ℓ_1 *и проекцией прямой* ℓ_2 *на любую плоскость, проходящую через прямую* ℓ_1 .



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2)\right|}{\left|\bar{\ell}_1\right| \cdot \left|\bar{\ell}_2\right|} = \pm\frac{\left|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

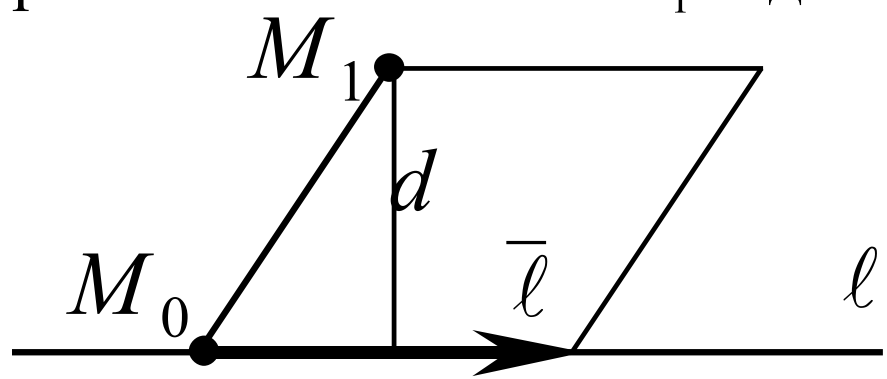
Пусть дана прямая $\ell: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\overline{\ell} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ,

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой ℓ,

d – расстояние от точки M_1 до ℓ.



Получаем:
$$d = \frac{\left|\left[\overline{\ell}, \overline{\mathbf{M_0M_1}}\right]\right|}{|\overline{\ell}|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

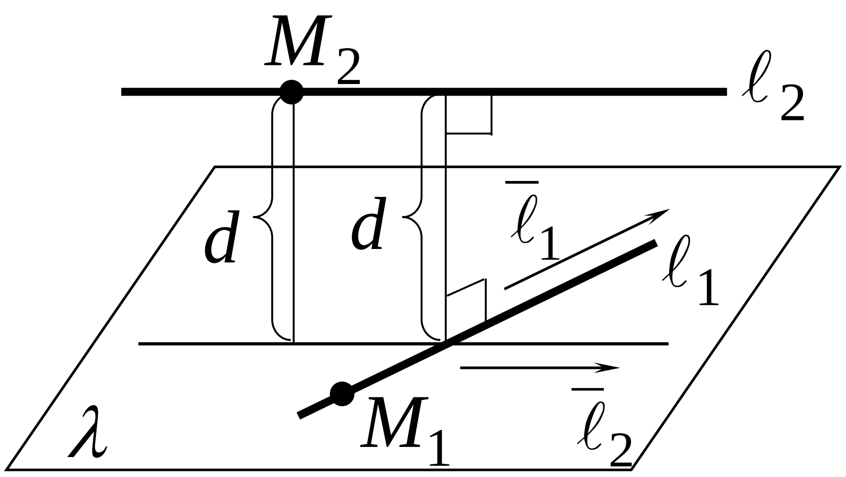
$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} .$$

$\overline{\ell}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор ℓ_i,

$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \ell_i$

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

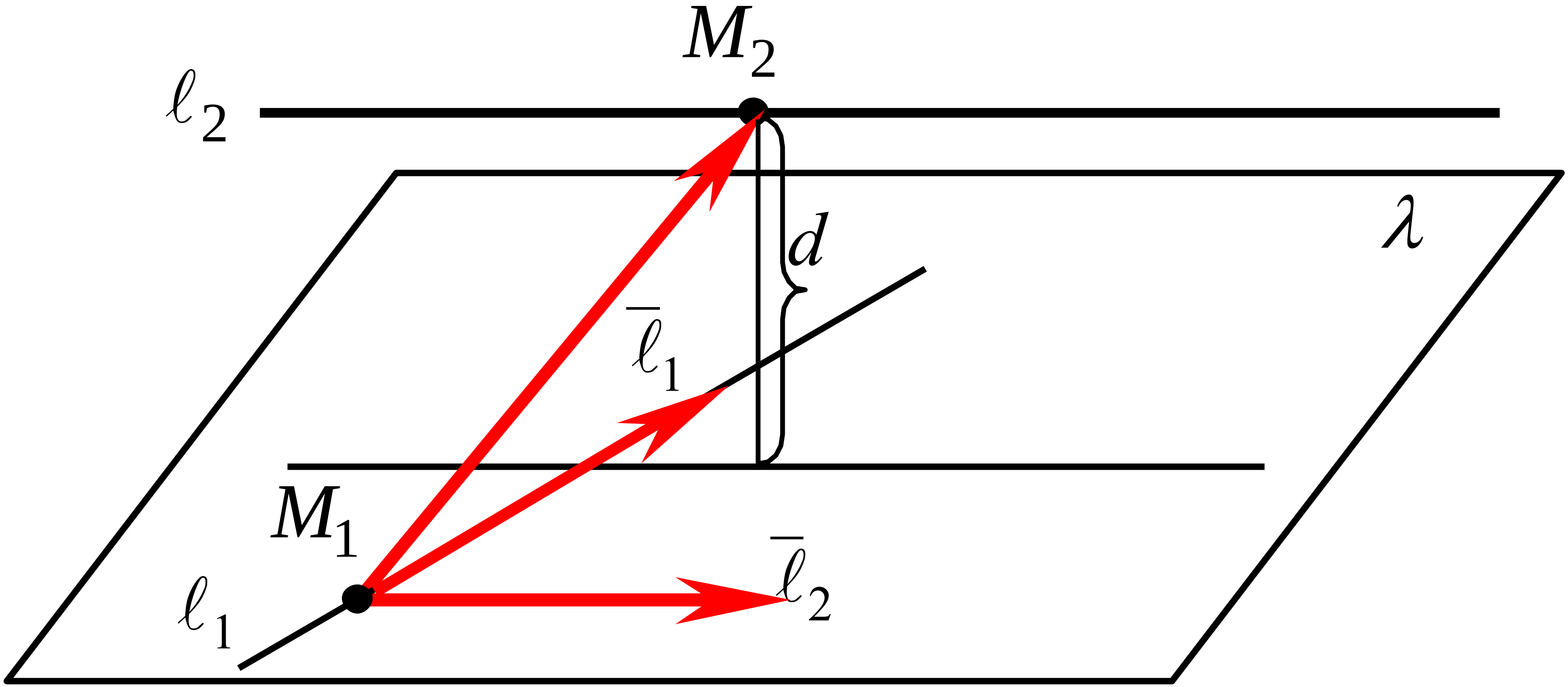


Получаем:

$$d = \frac{\left| Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости λ,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2.



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2.
Следовательно:

$$d=\frac{3\cdot V_{пир}}{S_{осн}}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{\ell}_1,\overline{\ell}_2,\overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)\right|}{\frac{1}{2}\cdot\left|\left[\overline{\ell}_1,\overline{\ell}_2\right]\right|}=\frac{\left|\left(\overline{\ell}_1,\overline{\ell}_2,\overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)\right|}{\left|\left[\overline{\ell}_1,\overline{\ell}_2\right]\right|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка пересечения прямых. Тогда $(x_0;y_0;z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}, \\ \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

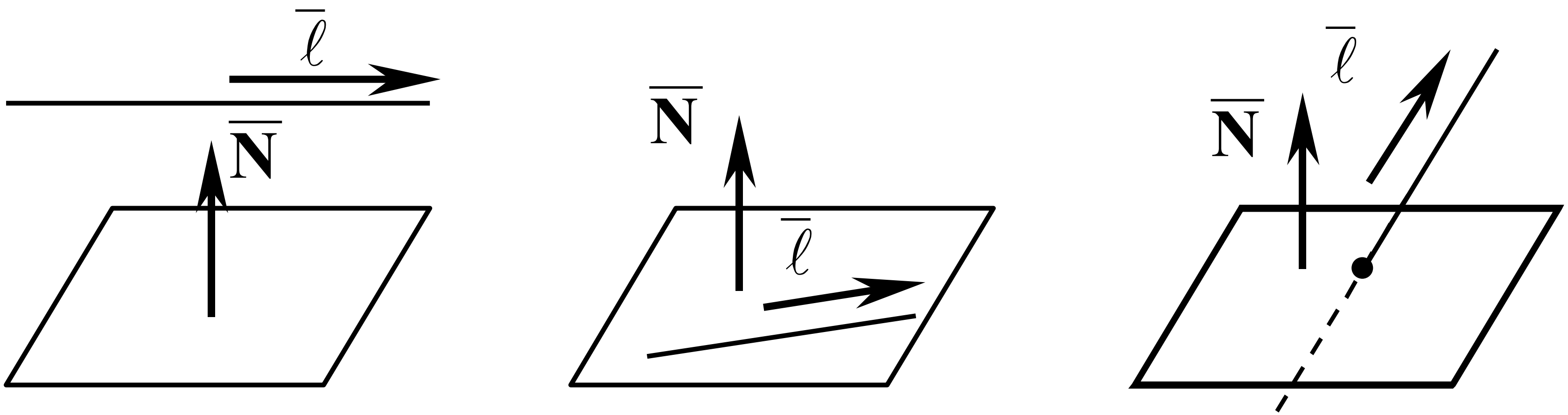
Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ. Они могут

1) быть параллельны;
2) прямая может лежать в плоскости;
3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть $\lambda : Ax + By + Cz + D = 0$ и $\ell : \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Тогда $\overline{\mathbf{N}} = \{A;\ B;\ C\}$ – нормальный вектор плоскости,

$\overline{\ell} = \{m;\ n;\ p\}$ – направляющий вектор прямой.



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то

$$\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right) = 0 \qquad (10)$$

или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0\,. \qquad (11)$$

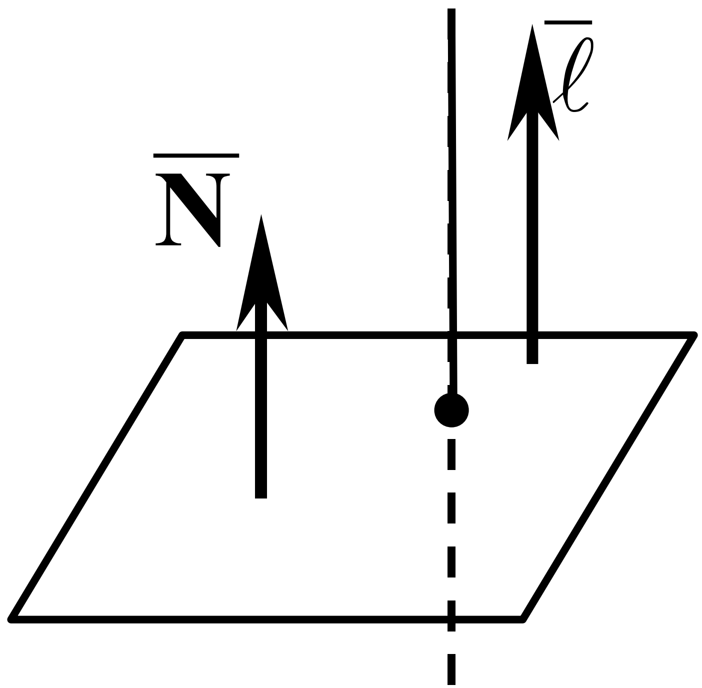
Если условие (10) (условие (11)) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\,,$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – любая точка прямой.

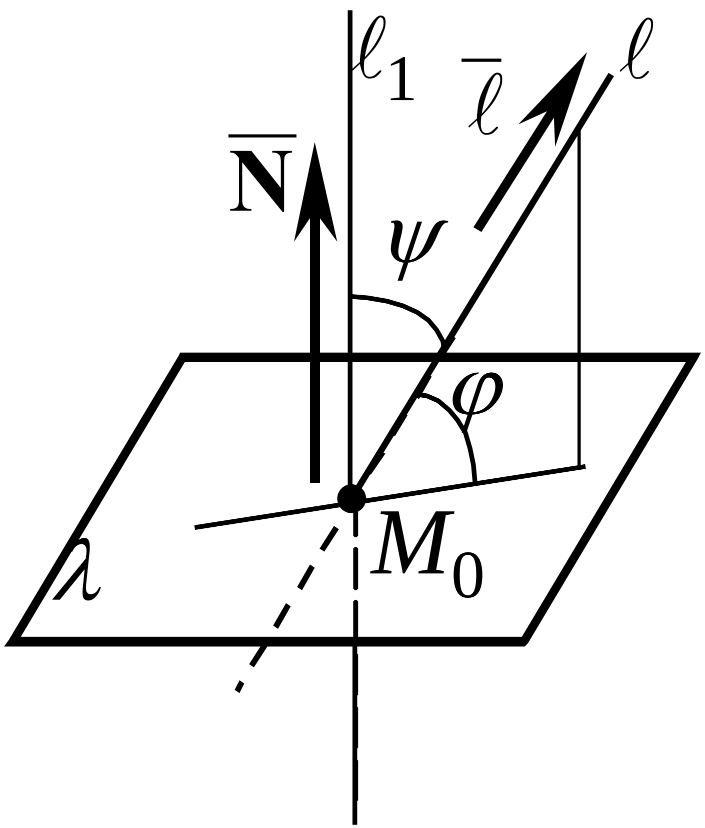
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\overline{\mathbf{N}} \parallel \overline{\ell}$ т.е. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между прямой ℓ и плоскостью λ называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость λ.*

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\overline{\ell}\right|}$$