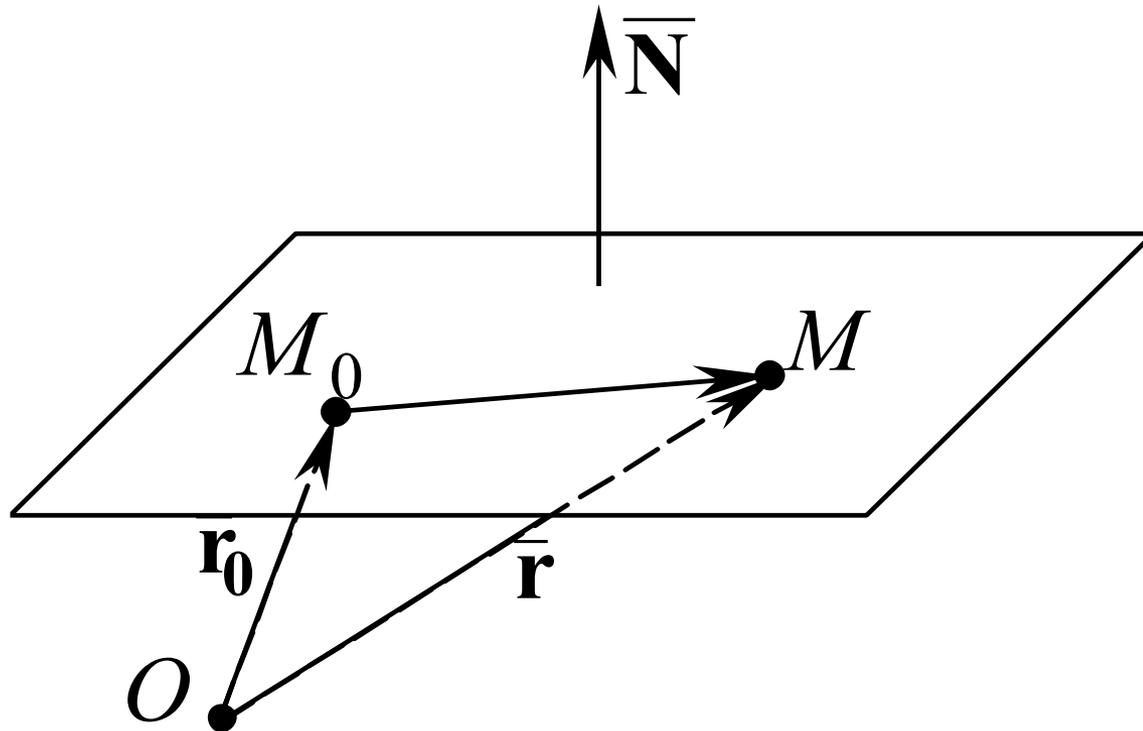


§ 3. Плоскость

1. Общее уравнение плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}} = \{A, B, C\}$

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют **нормальным вектором** этой плоскости.



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$ (1*)

и $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (1)

называют *уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{\mathbf{N}} = \{A, B, C\}$* (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + D = 0$ (2*)

и $Ax + By + Cz + D = 0$ (2)

называют *общим уравнением плоскости* (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

- 1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – числа.
- 2) Коэффициенты A, B, C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

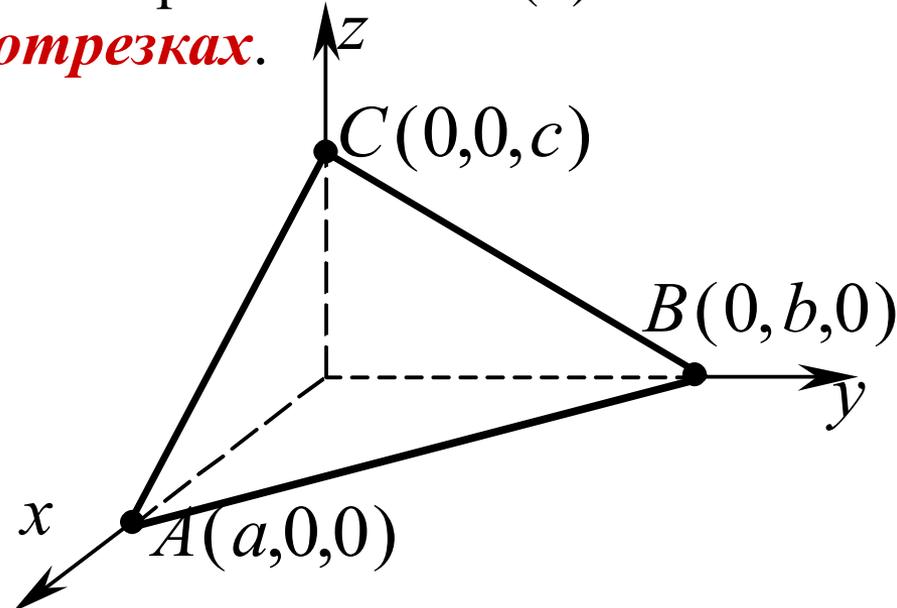
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – **неполным**.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3)$$

С геометрической точки зрения a, b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox , Oy и Oz соответственно. Уравнение (3) называют **уравнением плоскости в отрезках**.



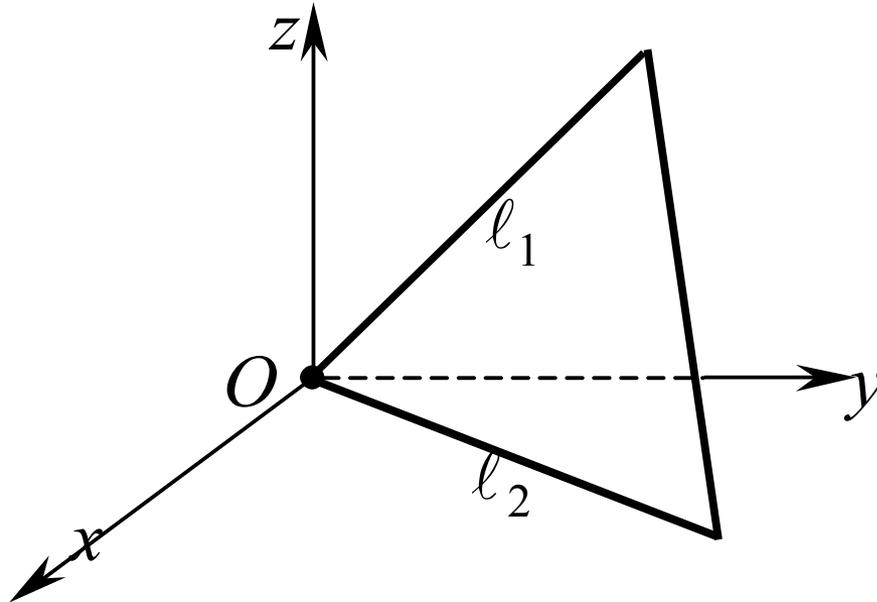
2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты A , B и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$.

$\ell_1: By + Cz = 0$ (пересечение с плоскостью Oyz)

$\ell_2: Ax + By = 0$ (пересечение с плоскостью Oxy)



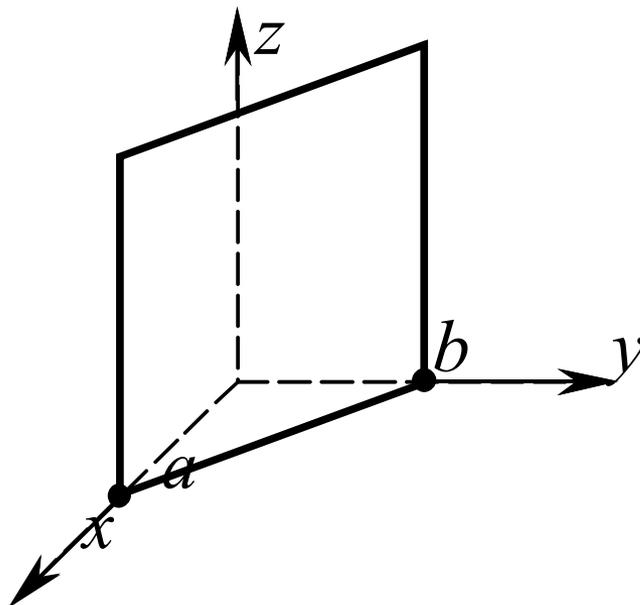
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A , B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а) $Ax + By + D = 0$ б) $Ax + Cz + D = 0$ в) $By + Cz + D = 0$.

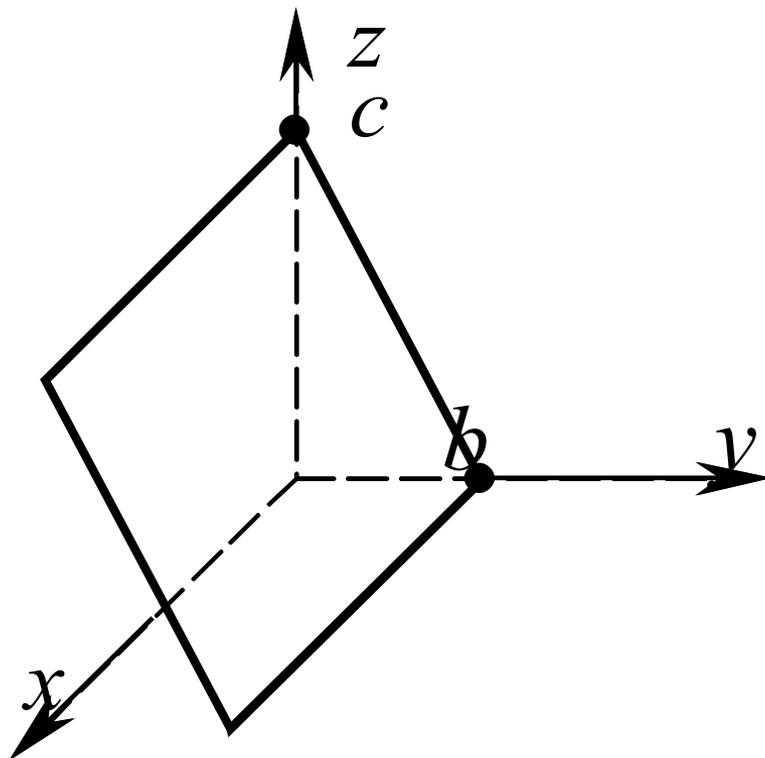
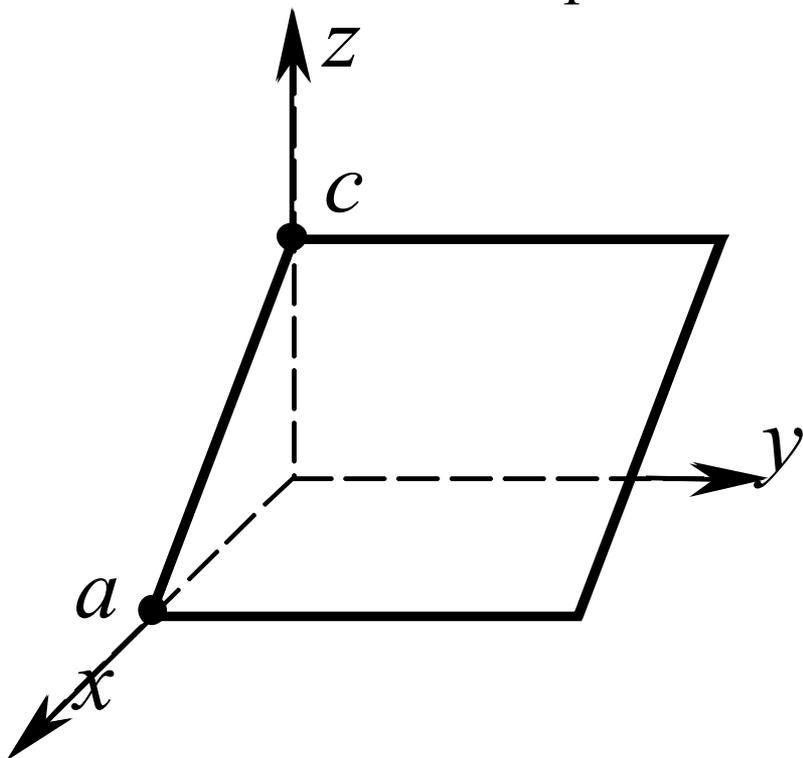
Эти уравнения можно записать соответственно в виде

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ б) $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ в) $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно и параллельна оси Oz ;



- б) плоскость отсекает на осях Ox и Oz отрезки a и c соответственно и параллельна оси Oy ;
- в) плоскость отсекает на осях Oy и Oz отрезки b и c соответственно и параллельна оси Ox .



Иначе говоря, плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов A , B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид: а) $Ax + D = 0$ или б) $Bu + D = 0$ или в) $Cz + D = 0$.

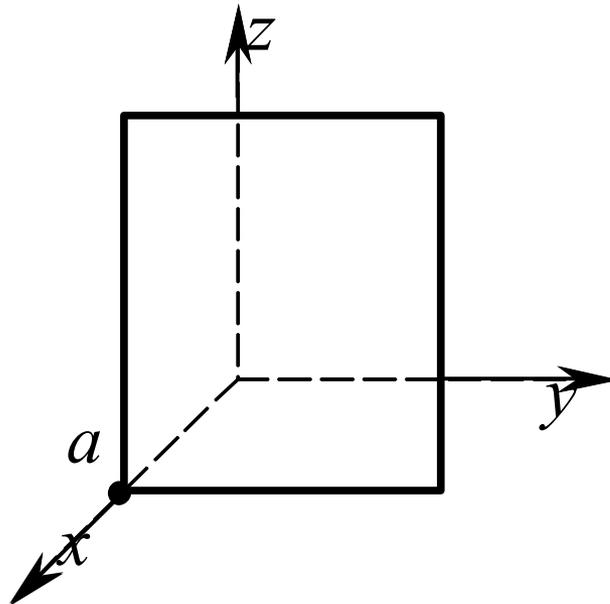
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $\frac{x}{a} = 1$

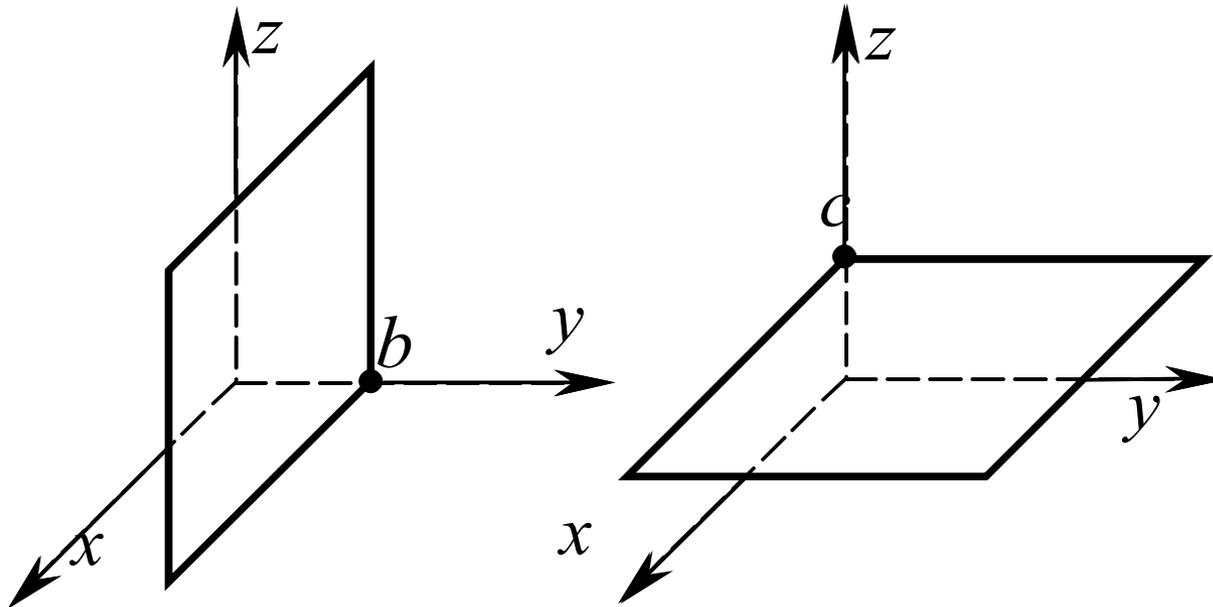
б) $\frac{y}{b} = 1$

в) $\frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на оси Ox отрезок a и параллельна осям Oy и Oz (т.е. параллельна плоскости Oyz);



- б) плоскость отсекает на Oy отрезок b и параллельна осям Ox и Oz (т.е. параллельна плоскости Oxz);
- в) плоскость отсекает на Oz отрезок c и параллельна осям Ox и Oy (т.е. параллельна плоскости Oxy).

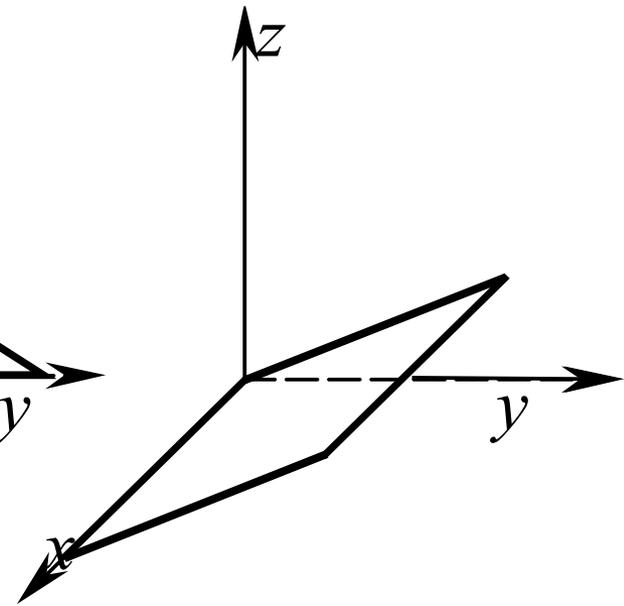
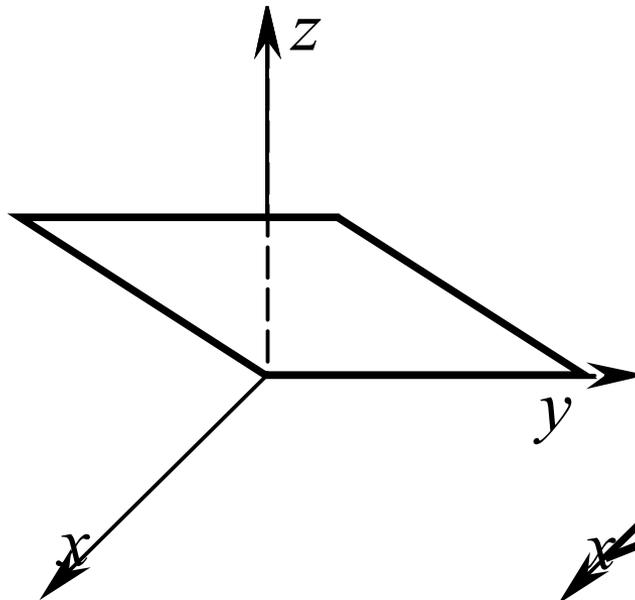
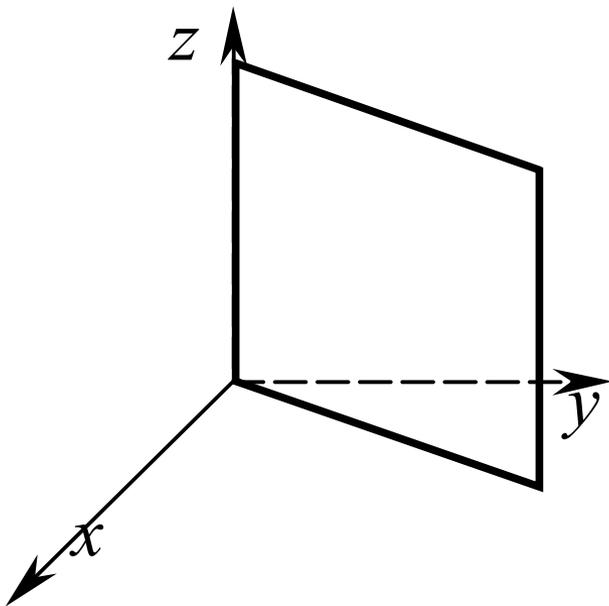


Иначе говоря, *плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат.*

5) Пусть в общем уравнении плоскости (2) $D = 0$ и один из коэффициентов A , B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax + By = 0$ или б) $Ax + Cz = 0$ или в) $By + Cz = 0$.

Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей координаты



б) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$\text{а) } Ax = 0 \quad \text{или} \quad \text{б) } By = 0 \quad \text{или} \quad \text{в) } Cz = 0.$$

Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz ;

б) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz ,

в) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy .

2. Другие формы записи уравнения плоскости

Другие формы записи:

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору (см. уравнение (1) и (1*));

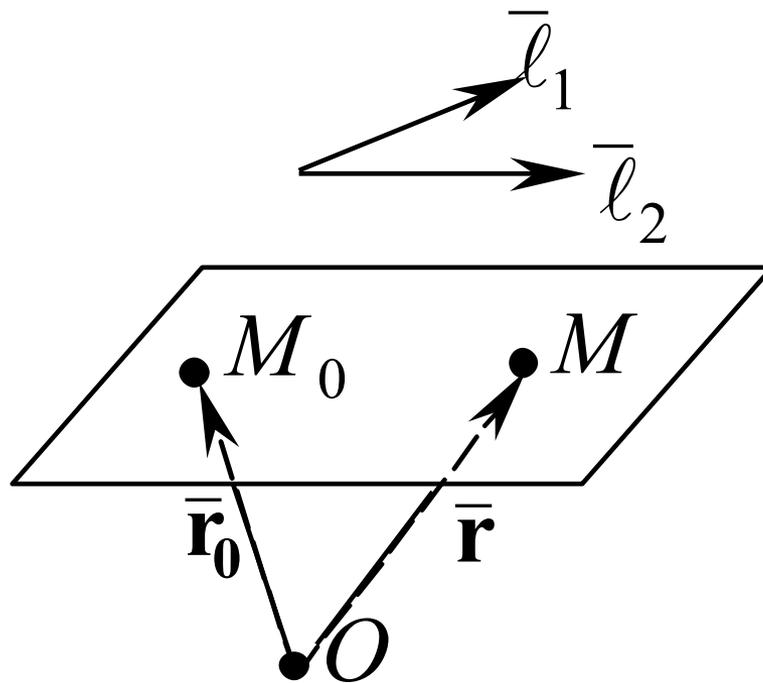
Уравнение плоскости в отрезках (см уравнение (2));

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам;

Уравнение плоскости, проходящей через три точки;

1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\vec{l}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$



Уравнения

$$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{l}}_1, \bar{\mathbf{l}}_2) = 0 \quad (4^*)$$

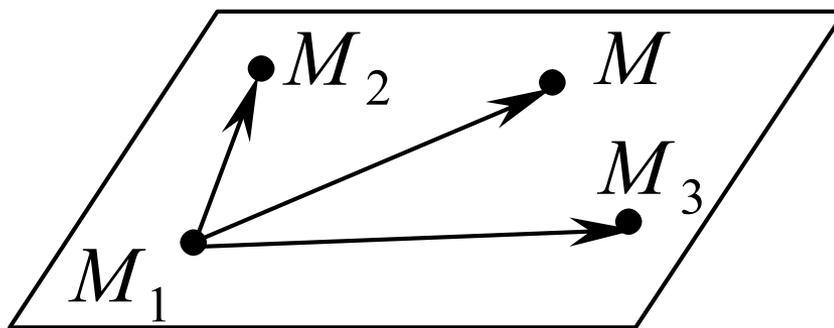
и

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

называют **уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1) = 0$ (5*)

и
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 (5)

называют **уравнениями плоскости, проходящей через три точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться.

Пусть уравнения плоскостей λ_1 и λ_2 имеют вид:

$$\lambda_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

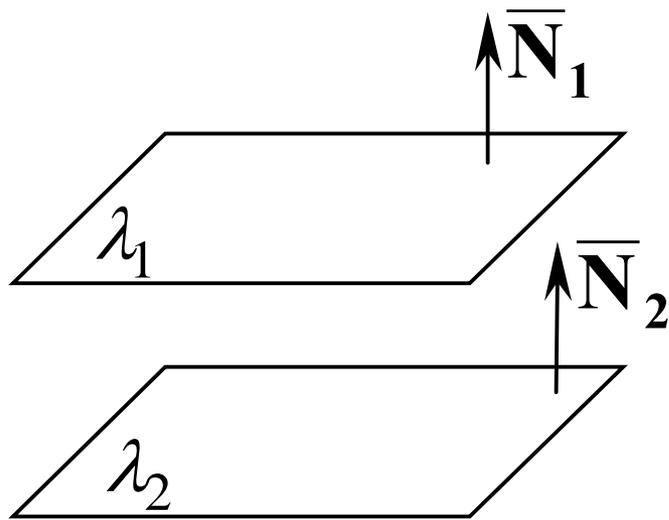
$$\lambda_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда:

$$\bar{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} \text{ — нормаль к } \lambda_1 \text{ ;}$$

$$\bar{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} \text{ — нормаль к } \lambda_2 \text{ ;}$$

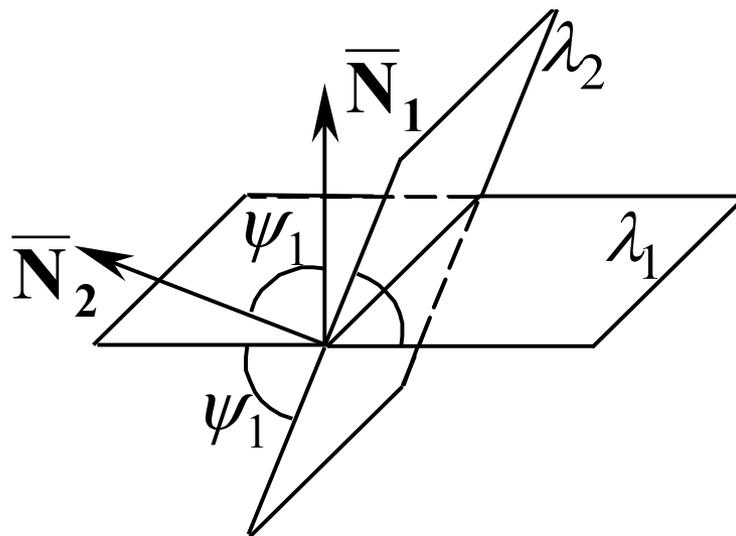
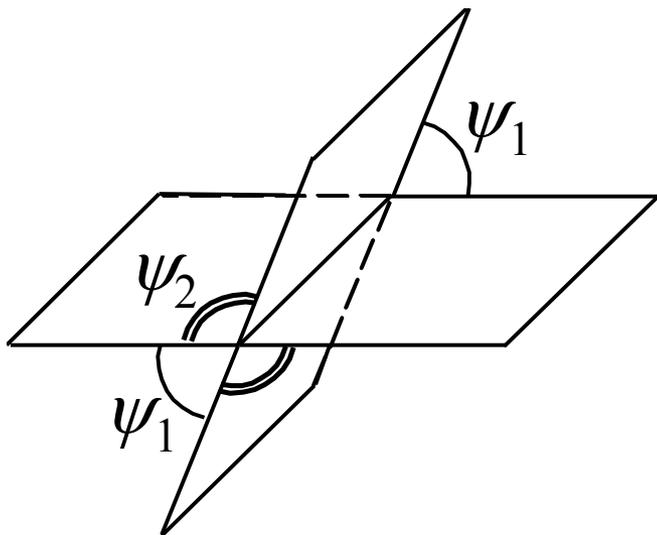
1) Пусть плоскости параллельны:



Получаем, что *плоскости λ_1 и λ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются



$$\cos\psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2)|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos\psi_1 = \cos\psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos\psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)|}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = 0$$

$$(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad -$$

критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями.

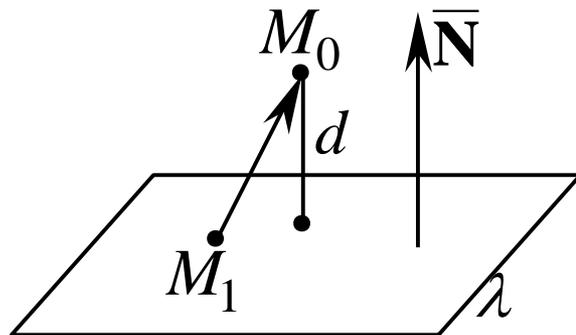
4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, не принадлежащая плоскости λ .

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ .



$$d = \frac{|(\overline{N}, \overline{M_1M_0})|}{|\overline{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$