Математический анализ
Раздел: Дифференциальное исчисление

Тема: ***Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Формула Тейлора***

Лектор Янущик О.В.

2015 г.

§8. Основные теоремы дифференциального исчисления

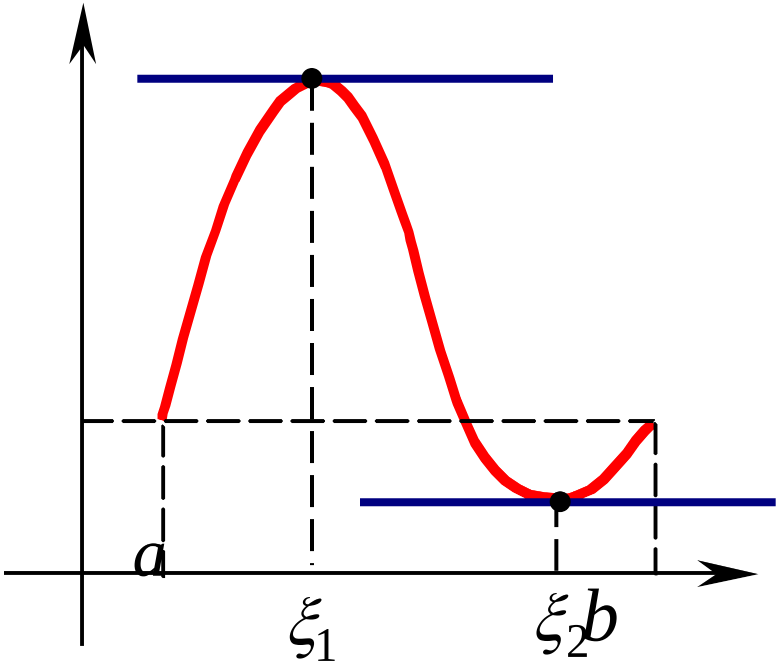
ТЕОРЕМА 1 (Ролля).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Если $f(a) = f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что*

$$f'(\xi) = 0 .$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Ролля.



Если функция $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 1 *условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна оси* Ox.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

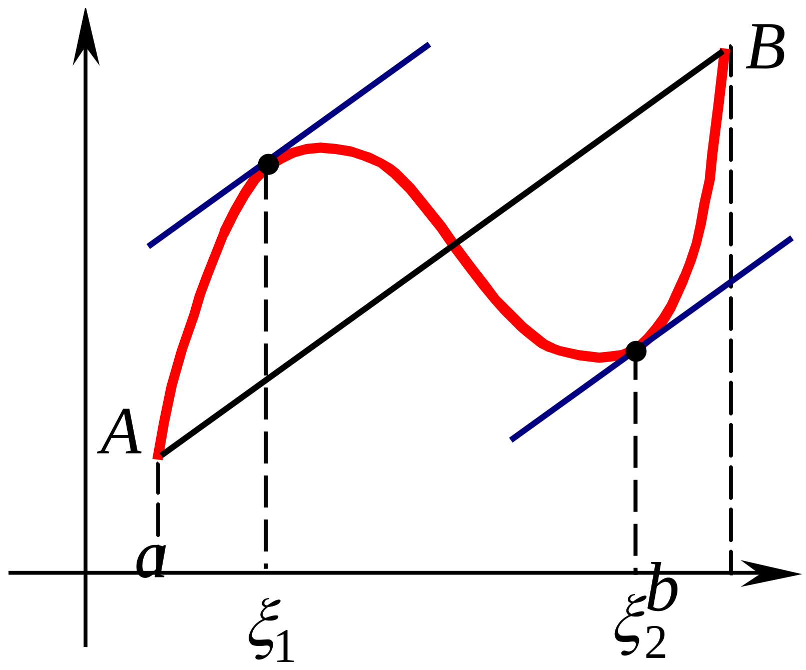
ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Лагранжа.



Следовательно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 2 *условиям, то на интервале* $(a;\ b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна секущей AB*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) . \qquad (3)$$

Формулу (3) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

СЛЕДСТВИЕ теоремы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Функция $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *постоянное значение* C $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a; b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 3 (Коши).

Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;\ b]$ *и дифференцируемы на* $(a;\ b)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a;\ b)$. *Тогда существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a;\ b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§9. Использование производной при вычислении пределов

ТЕОРЕМА 1 (Правило Лопиталя).

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и выполняются следующие условия:

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой δ-окрестности x_0, за исключением возможно самой x_0;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \quad \left(\text{èëè} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty \right)$;

3) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $U^*(x_0,\delta)$, причем

$$\varphi'(x) \neq 0\,,\ \ \forall x \in U^*(x_0,\delta)\,.$$

Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный),

то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти два предела будут равны. Т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Замечания.

1) Если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ тоже являются б.м. (б.б.) при $x \to x_0$, то правило Лопиталя можно применить повторно.

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя неприменимо. При этом $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать.

ПРИМЕР. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

§10. Формула Тейлора

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда $$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) ,$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. более высокого порядка чем Δx .

Пусть $$\beta_1(\Delta x) = \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$$

Тогда $$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x ,$$

где $\beta_1(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

$$\Rightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x . \qquad (1)$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$,

$$\Rightarrow \quad \Delta x = x - x_0$$

и формула (1) примет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_1 \cdot (x - x_0) , \qquad (2)$$

где $\beta_1(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пусть $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности x_0 .

Тогда β_1 – дифференцируема в точке x_0,

$$\beta_1(x_0) = 0 , \quad \beta_1'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$\Rightarrow$ Применяя к функции β_1 формулу (2) получим

$$\beta_1(x) = \beta_1(x_0) + \beta_1'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_2 \cdot (x - x_0) =$$

$$= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + \beta_2 \cdot (x - x_0)$$

где $\beta_2(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Тогда из (2) для $f(x)$ получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \beta_2(x - x_0)^2 \qquad (3)$$

Пусть $y = f(x)$ трижды дифференцируема в окрестности x_0 .

Тогда β_2 – дифференцируема в точке x_0,

$$\beta_2(x_0) = 0\ , \quad \beta_2'(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{2\cdot 3}$$

$\Rightarrow$ Применяя к функции β_2 формулу (2) получим

$$\beta_2(x) = \beta_2(x_0) + \beta_2'(x_0)\cdot(x - x_0) + \beta_3\cdot(x - x_0) =$$

$$= \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) + \beta_3\cdot(x - x_0)$$

где $\beta_3(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Тогда из (3) для $f(x)$ получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+\beta_3(x - x_0)^3$$

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то применим n раз формулу (2) к функции β_i и получим (4):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+\beta_n (x - x_0)^n$$

где $\beta_n(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Формулу (4) называют ***формулой Тейлора разложения функции f(x) по степеням (x – x₀)*** (***в окрестности точки*** $\boldsymbol{x_0}$).

Слагаемое

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют ***многочленом Тейлора функции f(x) по степеням*** $\boldsymbol{(x - x_0)}$.

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ ***называют остаточным членом формулы Тейлора***.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – ***форма Пеано***;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то R_n можно записать в ***форме Лагранжа*** **:**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x.

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (5):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (5) называют ***формулой Маклорена***.

Применение формулы Маклорена (Тейлора):

1) в приближенных вычислениях (значений функций, определенных интегралов и т.п.);

2) при нахождении пределов.