Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: ***Предел функции***

(предел функции и его свойства, бесконечно большие функции и их свойства)

Лектор Янущик О.В.

2015 г.

§3. Предел функции

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε-δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0*** (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

если $x \in U^*(x_0, \delta)$, *то* $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

Замечание.

1) Условие $x \in U^*(x_0,\delta)$ означает, что для x выполняется неравенство:

   а) $0 < | x - x_0 | < \delta$, если $x_0 \in \mathbb{R}$;

   б) $| x | > 1/\delta$, если $x_0 = \infty$;

   в) $x > 1/\delta$, если $x_0 = +\infty$;

   г) $x < -1/\delta$, если $x_0 = -\infty$.

2) Условие $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(x)$ выполняется неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).
Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции f(x) при x стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$, *если для любой последовательности* $\{x_n\}$ *значений аргумента, стремящейся к* x_0, *соответствующая последовательность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *сходится к* A .

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны*.

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad f(x) \to A,$ ïðè $x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0» .

2. Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем, что справедливы следующие утверждения.

1) Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

2) Если $f(x) \to A$, то $|f(x)| \to |A|$.

3) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: ***функция локально ограничена***)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

4) ЛЕММА 2 (о роли бесконечно малых функций).

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

6) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to x_0$.
Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \to x_0$, причем

$$a)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$b)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$c)\quad \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

Следствие свойства 6. Если $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то $\forall c \in \mathbb{R}$ функция $c \cdot f(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».
Замечание. Свойство 6 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

7) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \geq 0$ (или $f(x) > 0$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$

8) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \geq g(x)$ (или $f(x) > g(x)$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

9) ЛЕММА 3 (о двух милиционерах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

10) Пусть $f\colon X \to Y$, $\varphi\colon Y \to Z$ и существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = z_0$$

Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = z_0 \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной в пределе***

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (на языке M-δ, на языке окрестностей). *Функцию* $f(x)$ *называют* ***бесконечно большой при $x \to x_0$*** (в точке x_0), *если* $\forall M>0 \ \exists \delta>0$ *такое, что*

$$\textit{если} \ \ x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta), \quad \textit{то} \ \ |\, f(x)\,| > M\,.$$

Замечание. Условие $|\, f(x)\,| > M$ означает, что $f(x) \in \mathrm{U}(\infty, 1/M)$.

$\Rightarrow$ Записывают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \qquad f(x) \to \infty,$ ïðè $\ x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к ∞ при $x \to x_0$»

«предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен ∞».

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке последовательностей). *Функцию $f(x)$ называют* ***бесконечно большой при $x \to x_0$***, *если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к* ∞.

ТЕОРЕМА 4. *Определение бесконечно большой функции на языке* M-δ *и на языке последовательностей – эквивалентны.*

Частные случаи бесконечно больших функций:

1) $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta)$.

Тогда $|\, f(x)\, | = f(x) > M$, $\forall x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta)$

Записывают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$ $\quad f(x) \to +\infty$ ïðè $x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to x_0$»

«предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен $+\infty$».

2) $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta)$.

Тогда $|\, f(x)\, | = -f(x) > M$

$\Rightarrow f(x) < -M, \ \forall x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta)$

Записывают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$ $\quad f(x) \to -\infty$ ïðè $x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to x_0$»

«предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен $-\infty$».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

1) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, то функция $1/f(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.
Если $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to x_0$, то функция $1/\alpha(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ – б.б функции одного знака, то их сумма $f(x) + g(x)$ – б.б. того же знака.

3) Если $f(x)$ – б.б при $x \to x_0$, $g(x)$ – ограниченна в некоторой окрестности $U^*(x_0, \delta)$, то их сумма $f(x) + g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

4) Если $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – тоже б.б. при $x \to x_0$.

5) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, $g(x)$ – имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq 0$$

то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

6) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $|f(x)| < |g(x)|$ $(|f(x)| \leq |g(x)|)$,
то функция $g(x)$ тоже является б.б. при $x \to x_0$.

7) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. одного знака при $x \to x_0$ и $\exists \delta > 0$ такое, что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.
Тогда функция $\varphi(x)$ тоже является б.б. того же знака при $x \to x_0$.

(лемма о двух милиционерах для б.б. функций)