Математический анализ

Раздел: Введение в анализ

Тема: ***Понятие функции***

(основные определения, классификация, основные характеристики поведения)

Лектор Янущик О.В.

2015г.

Литература

- Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2*
- Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*
- Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа*
- Запорожец Г.И. *Руководство к решению задач по математическому анализу*

Математический анализ – часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются с помощью пределов.

Глава I. Введение в анализ

§1. Понятие функции

1. Основные понятия

Пусть X,Y – множества произвольной природы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $\forall x\in X$ *поставлен в соответствие* ***единственный*** *элемент* $y\in Y$*, то говорят, что на множестве* X *задана* ***функция*** *(****отображение****) с множеством значений* Y.

Записывают: $f\colon X \to Y$, $y = f(x)$

(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: X – область (множество) определения функции

x ($x\in X$) – аргумент (независимая переменная)

Y – область (множество) значений

y ($y\in Y$) – зависимая переменная (функция)

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1) словесный;

2) табличный;

3) графический;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ *называется геометрическое место точек плоскости с координатами* $(x; f(x))$.

График функции $y = f(x)$ будем также называть «кривой $y = f(x)$».

4) аналитический:

а) явное задание (т.е. формулой $y = f(x)$)

б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения $F(x,y)=0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть заданы две функции*:

$$f : X \to Y\ ,\ f(x) = y$$

и $$\varphi : Y \to Z\ ,\ \varphi(y) = z.$$

Функция $\psi : X \to Z$, $\psi(x) = z$ *называется* ***композицией функций*** φ и f *или* ***сложной функцией***.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\varphi \circ f$ или φf.

Итак, по определению,

$$\varphi f(x) = z = \varphi(y) = \varphi(f(x))$$

Поэтому сложную функцию называют еще ***функцией от функции***. При этом функцию φ называют ***внешней***, функцию f – ***внутренней***.

Пусть задана функция $f : X \to Y$, $f(x) = y$ и $y_0 \in Y$.
Возможны два случая:

а) существует единственный $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$;

б) существуют $x_1, x_2, \ldots \in X$ такие, что $f(x_\mathrm{i}) = y_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $\forall y_0 \in Y$ *существует единственный* $x_0 \in X$ *такой, что* $f(x_0) = y_0$ *, то функцию* $f(x)$ *называют* ***биекцией*** (или ***взаимно однозначной***).

Если $y = f(x)$ *– биекция, то можно определить функцию*

$$\varphi : Y \to X , \varphi(y_0) = x_0 .$$

Эту функцию называют ***обратной к функции*** f и в общем случае обозначают f^{-1}.

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y.

Поэтому *графики функции* $y = f(x)$ *и ее обратной функции* $x = f^{-1}(y)$ *совпадают*.

Для удобства, обратную функцию записывают в виде $y = f^{-1}(x)$ (т.е. переобозначают переменные).

Графики функций $y = f(x)$ *и* $y = f^{-1}(x)$ *симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного угла* (т.к. при переобозначении переменных оси Ox и Oy меняются местами).

2. Классификация вещественных функций, вещественного аргумента

- Вещественные функции вещественного аргумента
  - элементарные
  - неэлементарные

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Элементарной функцией*** *называется функция, которая может быть задана одной формулой* $y = f(x)$, *где* $f(x)$ *– выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.*

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ:

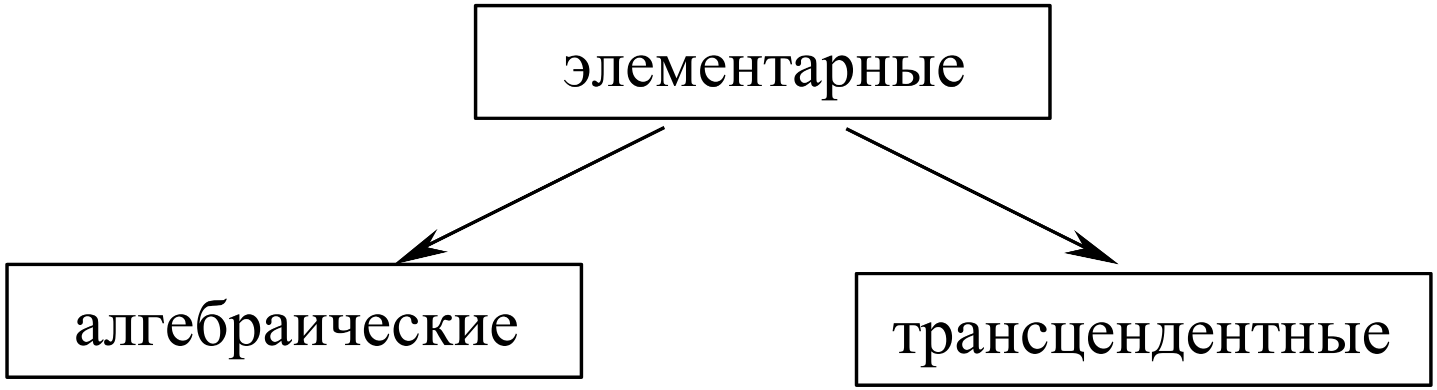
1) степенные: $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$

2) показательные: $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

3) логарифмические: $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

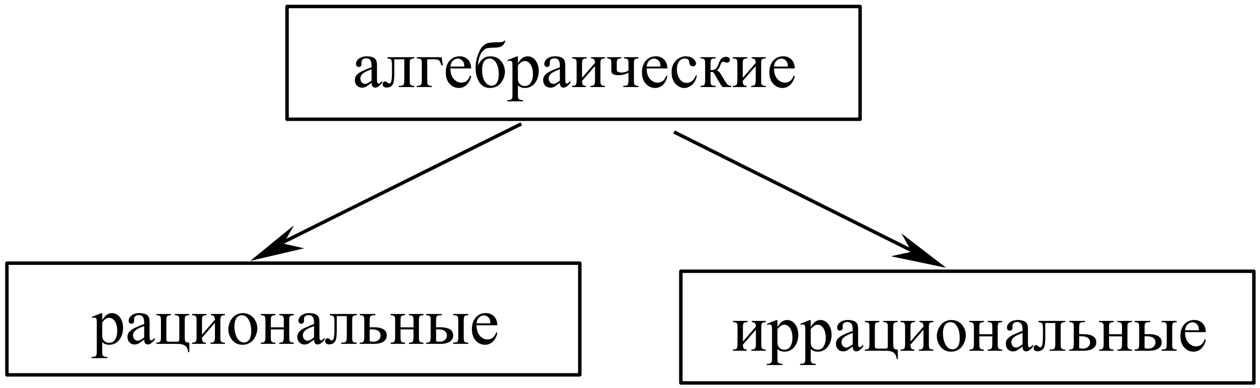
4) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$

5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$



Функция называется ***алгебраической***, если ее значения можно получить из аргумента и действительных чисел с помощью конечного числа алгебраических операций (т.е. сложения, вычитания, умножения, деления) и возведения в степень с рациональным показателем.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется ***трансцендентной***.



Алгебраическая функция называется ***рациональной***, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корня.

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется ***иррациональной***.

рациональные

Целые рациональные (многочлен)

Дробные рациональные (рациональные дроби)

Многочлен (полином) – рациональная функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ ,$$

где $n \in \mathbb{N}$ (n – ***степень многочлена***),

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ – ***коэффициенты многочлена***).

Рациональная дробь – отношение двух многочленов, т.е.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$$

3. Основные характеристики поведения функции

1) Четность функции

Функция $y = f(x)$ *называется* ***четной***, *если* :

а) *область определения функции* $\mathrm{D}(f\,)$ *симметрична относительно начала координат;*

б) $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathrm{D}(f\,)$.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***нечетной***, *если* :

а) *область определения функции* $\mathrm{D}(f\,)$ *симметрична относительно начала координат;*

б) $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathrm{D}(f\,)$.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется ***функцией общего вида***.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) Периодичность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Функция $y = f(x) \not\equiv \text{const}$ *называется* ***периодической***, *если* $\exists t \neq 0$ *такое, что*

а) $x + t\,,\, x - t \in D(f),\ \forall x \in D(f)$;

б) $f(x \pm t) = f(x)$.

Число t *при этом называют* ***периодом функции***.

Если $y = f(x)$ – периодическая, то ее наименьший положительный период T называют ***основным периодом***.

$\Rightarrow$ любой период функции имеет вид kT , где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

3) Монотонность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей*** (***неубывающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) \le f(x_2)).$$

Функция $y = f(x)$ *называется* ***убывающей*** (***невозрастающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными***.

4) Ограниченность функции

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной снизу***, *если* $\exists a \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$a \le f(x)\,,\ \ \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной сверху***, *если* $\exists b \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$f(x) \le b\,,\ \ \forall x \in D(f).$$

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется ***ограниченной***.

$\Rightarrow$ Функция ограниченная, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a \le f(x) \le b\,,\ \ \forall x \in D(f).$$

Функция $y = f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ такое, что

$$|\, f(x)\,| \le M\,,\ \ \forall x \in D(f).$$