Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Двойной интеграл***

(определение, свойства, вычисление)

Лектор Янущик О.В.

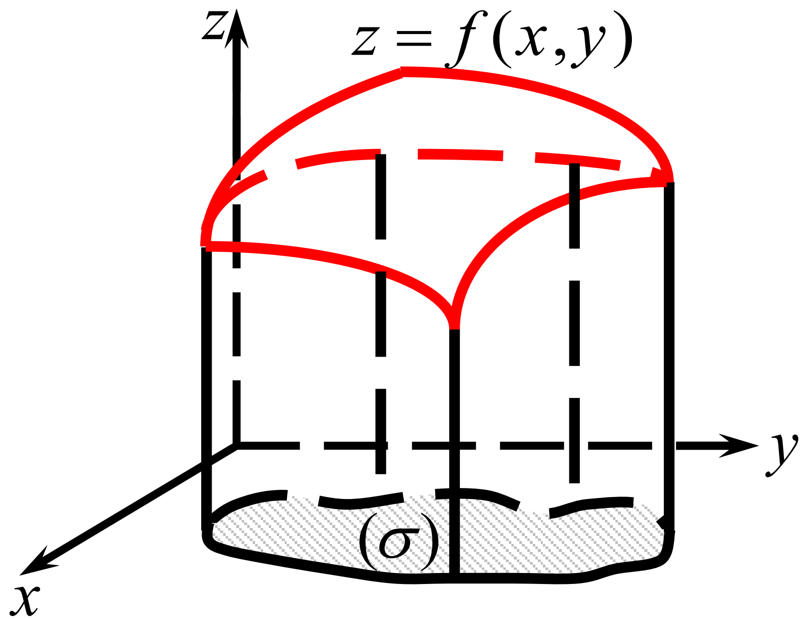
2012 г.

Глава II. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

§7. Двойной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

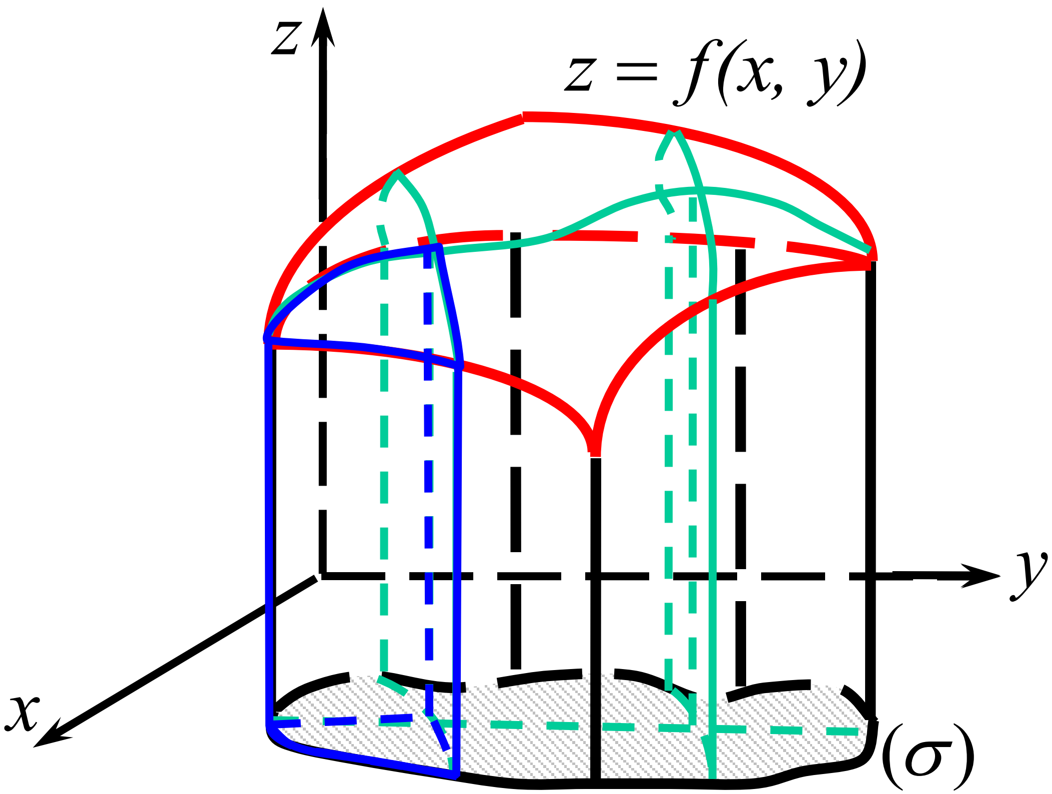
***Цилиндрическим телом с основанием* (σ)** называют область в пространстве, ограниченную областью (σ)$\in xOy$, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $\varphi(x,y) = 0$, направляющей которой является граница области (σ).

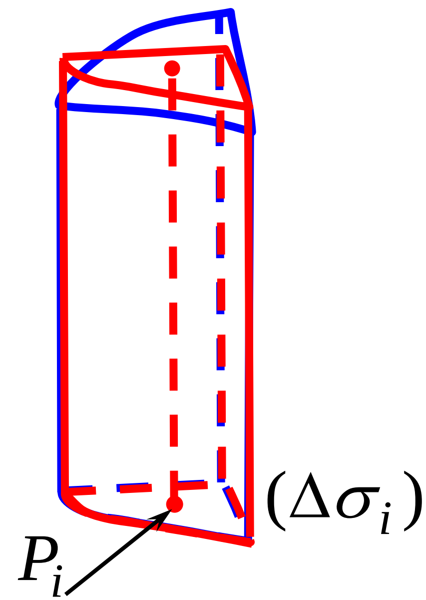


ЗАДАЧА (об объеме цилиндрического тела).

Пусть $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in (\sigma)$.

Найти объем V цилиндрического тела (V) .





$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$\Delta V_i \approx f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow \quad V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow \quad V = \lim_{(\Delta\sigma_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть (σ) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости xOy, и в области (σ) задана функция $z = f(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (σ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \ \ldots, (\Delta\sigma_n).$$

2. В каждой области ($\Delta\sigma_i$) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области ($\Delta\sigma_i$).

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y)$ по области (σ) (соответствующей данному разбиению области (σ) и данному выбору точек P_i).

Диаметром множества G будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества G.

Пусть d_{i} – диаметр $(\Delta\sigma_{\mathrm{i}})$, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения области* (σ) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$|\, I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I \,| < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области (σ)***.

Обозначают: $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,ds$, $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy$

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования двойного интеграла).

Если функция $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ), *то она ограничена в этой области.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования двойного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область* (σ) – *квадрируемая,*
2) *функция* $f(x,y)$ *ограничена в области* (σ) *и непрерывна всюду за исключением некоторого множества точек площади нуль,*

то $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ).

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = V,$$

где V – объем цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

2) $\iint\limits_{(\sigma)} dxdy = \sigma,$ где σ – площадь области (σ).

3) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} c \cdot f(x,y)dxdy = c \cdot \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy.$$

4) Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left[f_1(x,y) + f_2(x,y) \right] dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma)} f_2(x,y)dxdy.$$

5) Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)dxdy.$$

(свойство аддитивности двойного интеграла)

6) Если всюду в области (σ) $f(x,y) > 0$ ($f(x,y) \geq 0$), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \geq 0 \right).$$

7) Если всюду в области (σ) $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(x,y)dxdy$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

8) Следствие свойств 7 и 2.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области (σ), то

$$m \cdot \sigma \leq \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq M \cdot \sigma,$$

где σ – площадь области (σ).

9) Теорема о среднем для двойного интеграла.

Если функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой и ограниченной области* (σ), *то найдется такая точка* $P_0(x_0, y_0) \in (\sigma)$, *что справедливо равенство*

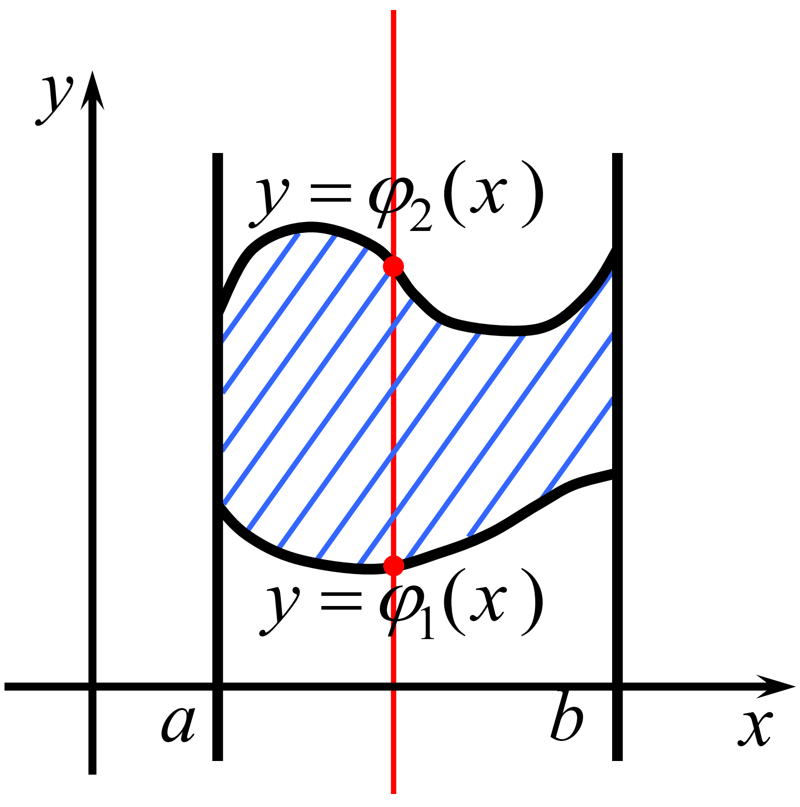
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = f(x_0; y_0) \cdot \sigma,$$

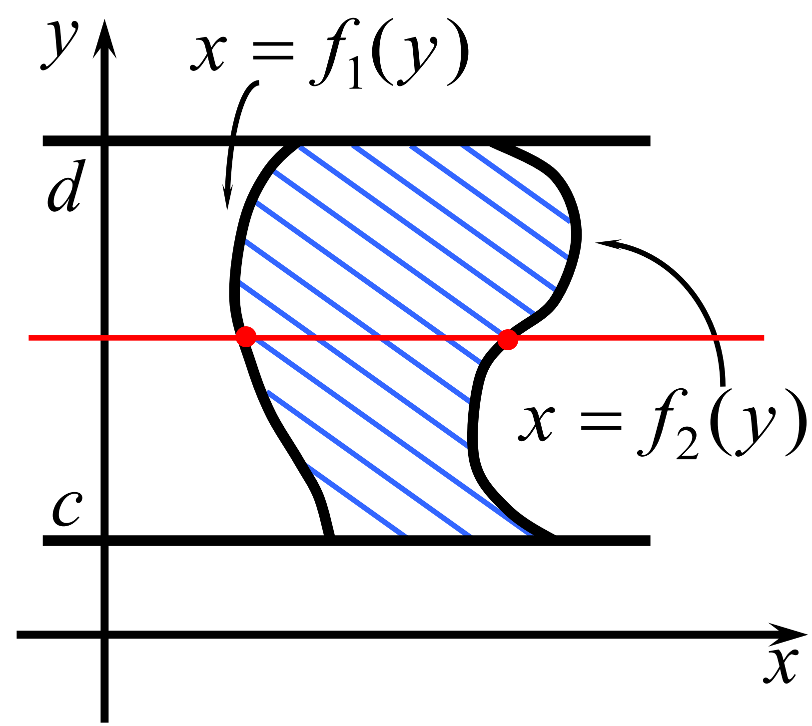
где σ – *площадь области* (σ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область (σ) ***правильной в направлении оси*** *Oy* (*Ox*), если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (σ) параллельно оси *Oy* (*Ox*) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.





ТЕОРЕМА 3.

Пусть функция $f(x, y)$ *интегрируема в области* (σ).

1) *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Oy, *то*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

где $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ *– уравнения кривых, ограничиваю щих область* (σ) *снизу и сверху соответственно,*

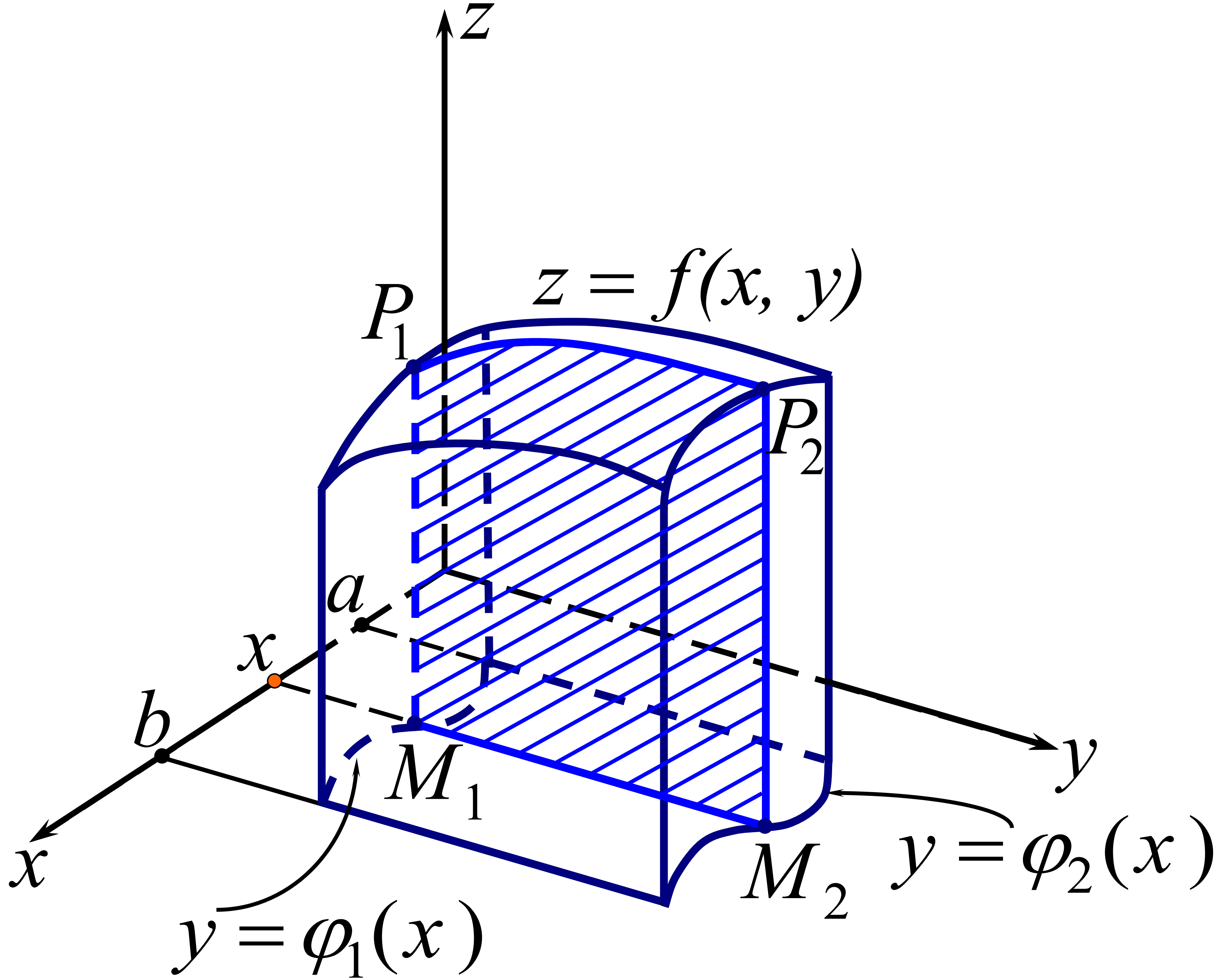
$[a;b]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Ox.

2) *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Ox, *то*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

где $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *слева и справа соответственно,*

$[c;d]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Oy.



z
$z = f(x, y)$
P_1
P_2
a
x
b
M_1
M_2
y
x
$y = \varphi_2(x)$
$y = \varphi_1(x)$