Математический анализ

Раздел: Интегрирование ФНП

Тема: ***Криволинейный интеграл I рода***

Лектор Янущик О.В.

2012.

§9. Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая кривая в $Oxyz$,

$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы вдоль (ℓ).

ЗАДАЧА. Найти массу m кривой (ℓ).

1. Разобьем (ℓ) на n частей $(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \ldots, (\Delta\ell_n)$.
2. Если $(\Delta\ell_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i)\cdot\Delta\ell_i$,

   где $\Delta\ell_i$ – длина $(\Delta\ell_i)$, P_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$.

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i)\cdot\Delta\ell_i\,,$$

$$m = \lim_{(\Delta\ell_i)\to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i)\cdot\Delta\ell_i\,.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:
$$(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \ \dots\ , (\Delta\ell_n).$$
2. На каждой дуге $(\Delta\ell_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i)\cdot\Delta\ell_i$, где $\Delta\ell_i$ – длина дуги $(\Delta\ell_i)$.

Сумму
$$I_n(\Delta\ell_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\ell_i$$
назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по кривой (ℓ) (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек P_i).

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\ell_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta\ell_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$ *, при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta\ell_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\ell_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$*, то его называют* ***криволинейным интегралом*** **I** ***рода (по длине дуги) от функции f(x,y,z) по кривой (ℓ)***.

Обозначают: $$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)\,d\ell .$$

Замечание. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления движения по кривой (ℓ), т.е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)\,d\ell = \int\limits_{(BA)} f(x,y,z)\,d\ell$$

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\int\limits_{(\ell)} d\ell = \ell,$ где ℓ – длина кривой (ℓ).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла I рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot f(x,y,z)d\ell = c \cdot \int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell$$

3. Криволинейный интеграл I рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} \left[f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) \right] d\ell = \int\limits_{(\ell)} f_1(x,y,z)\, d\ell + \int\limits_{(\ell)} f_2(x,y,z)\, d\ell$$

4. Если кривая (ℓ) разбита на две части (ℓ_1) и (ℓ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{(\ell_1)} f(x,y,z)d\ell + \int\limits_{(\ell_2)} f(x,y,z)d\ell$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла I рода).

5. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell > 0 \quad \left(\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \geq 0 \right)$$

6. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \leq \int\limits_{(\ell)} \varphi(x,y,z)d\ell .$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ на кривой (ℓ), то

$$m \cdot \ell \leq \int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \leq M \cdot \ell,$$

где ℓ – длина кривой (ℓ).

8. Теорема о среднем для криволинейного интеграла I рода.
Если функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на спрямляемой кривой* (ℓ), *то найдется такая точка* $P_0(x_0,y_0,z_0)\in(\ell)$, *что справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = f(x_0,y_0,z_0)\cdot \ell,$$

где ℓ *– длина кривой* (ℓ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая (ℓ) задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ z = \chi(t)\ \ (\text{где}\ \ \alpha \le t \le \beta\ ). \qquad (2)$$

Кривая (ℓ) называется ***гладкой***, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют на $[\alpha; \beta]$ непрерывные производные.

ТЕОРЕМА 1.

Если (ℓ) – гладкая кривая, заданная уравнениями (2) и функция $f(x,y,z)$ непрерывна на (ℓ), то $f(x,y,z)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt \qquad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если (ℓ) *– гладкая кривая в плоскости xOy , заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ *(где* $x \in [a;b]$ *) и функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x,y)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$$

СЛЕДСТВИЕ 3.

Пусть (ℓ) *– плоская кривая, заданная в полярных координатах уравнением* $r = r(\varphi)$ *(где* $\varphi \in [\alpha;\beta]$).

Если функция $r(\varphi)$ *непрерывно дифференцируема на* $[\alpha;\beta]$ *и функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x,y)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big)\cdot\sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

ТЕОРЕМА 4 (достаточные условия существования криволинейного интеграла I рода).

Если (ℓ) *– кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна на* (ℓ) , *то* $f(x,y,z)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) .

4. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов I рода

1) Длина ℓ спрямляемой кривой (ℓ) : $\ell = \int\limits_{(\ell)} d\ell$

2) Пусть (G) – цилиндр с направляющей $(\ell) \in xOy$. Тогда

$$S = \int\limits_{(\ell)} f(x, y) d\ell$$

где S – площадь части поверхности (G), заключенной между плоскостью xOy и поверхностью $z = f(x,y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Пусть (ℓ) – материальная спрямляемая кривая в пространстве $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

3) $\int\limits_{(\ell)} \gamma(x, y, z) d\ell = m,$ где m – масса кривой (ℓ) .

4) Статические моменты кривой (ℓ) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \int\limits_{(\ell)} z \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{yz} = \int\limits_{(\ell)} x \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{xz} = \int\limits_{(\ell)} y \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}$, $y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}$, $z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести кривой (ℓ).

6) Моменты инерции кривой (ℓ) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \int\limits_{(\ell)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_y = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_z = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

7) $I_o = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$ – момент инерции кривой (ℓ) относительно начала координат .