

Практическое занятие 4

Найти область сходимости ряда.

$$1. \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \dots + \frac{1}{1+x^{2n}}$$

$$2. 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-(n-1)x} + \dots$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(1+x)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} 2^{\frac{n}{4-x}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+1)}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(x^2+1)+4}.$$

7. Покажите, что ряд

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^4+2} + \frac{1}{x^6+3} - \frac{1}{x^8+4} \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{x^{2n}+n}$$

сходится равномерно на всей числовой прямой.

7. Показать с помощью признака Вейерштрасса, что ряд

$\sin x + \frac{1}{2^2} \sin^2 2x + \frac{1}{3^2} \sin^3 3x + \dots + \frac{1}{n^2} \sin^n nx$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

8. Законно ли применение к ряду

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2^2} \cos 3x + \dots + \frac{1}{2^n} \cos nx + \dots$$

теоремы об интегрирование функциональных рядов в интервале $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

9. Можно ли к ряду $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{x}{3\sqrt{3}} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{x}{n\sqrt{n}} + \dots$ применить теорему о почленном дифференцирование рядов?

Исследовать сходимость ряда

$$1. \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots$$

$$2. (x-3) + \frac{1}{2^3}(x-3)^2 + \frac{1}{3^3}(x-3)^3 + \dots + \frac{1}{n^3}(x-3)^n + \dots$$

$$3. (x-4) + 3!(x-4)^2 + 5!(x-4)^3 + \dots + n!(x-4)^n + \dots$$

$$4. \frac{x-2}{3} + \frac{(x-2)^2}{3 \cdot 7} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots + \frac{(x-2)^n}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)} + \dots$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 3^n}{n^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$$

$$7. 1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{100} + \dots + \frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}} + \dots$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{7n} 5^{7n}}{3n+2}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{4k+1}\right)^k (x+2)^{2k}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n/n+1}}{n^n}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n-1)/2}}{(n+3)!}$$

Домашняя работа к занятию 4.

1. Найдите общий член ряда и его область сходимости

1. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

2. $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4}{81} + \dots$

3. $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots$

4. $1 + (x-2) + \frac{(x-2)^3}{2} + \frac{(x-2)^5}{4} + \frac{(x-2)^7}{8} + \dots$

5. $\frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \dots$

6. $1 + \frac{9}{(x+3)^2} + \frac{81}{(x+3)^4} + \frac{729}{(x+3)^6} + \dots$

7. $1 + (x+5) + 2 \cdot (x+5)^2 + 6 \cdot (x+5)^3 + 24 \cdot (x+5)^4 + 120 \cdot (x+5)^5 + \dots$

.

2. Исследовать сходимость ряда

1. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot (n+1)} + \dots$

2. $x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (nx)^n + \dots$

3. $\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \dots$

4. $\frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2 \cdot 5} + \frac{x^9}{8^3 \cdot 9} + \dots + \frac{x^{3(n-1)}}{8^n \cdot (4n-3)} + \dots$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} (x-3)^{2k}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/n-2}}{(n+4)!}$