Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Степенные ряды.***

Лектор Янущик О.В.

2018 г.

§2. Степенные ряды

Степенным рядом (***рядом по степеням*** $x{-}x_0$) называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

где $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$. Числа a_n называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Частный случай степенного ряда – ***ряд по степеням*** x :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (1)$$

Будем изучать ряд $\sum a_n x^n$. На общий случай результаты переносятся заменой $x \to x - x_0$.

1. Сходимость степенных рядов

Степенной ряд $\sum a_n x^n$ всегда сходится в точке $x = 0$.

ТЕОРЕМА 1 (Абеля).

1) *Если степенной ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится в точке* $x_1 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в любой точке* x, *удовлетворяющей условию* $|x| < |x_1|$;

2) *Если степенной ряд* $\sum a_n x^n$ *расходится в точке* x_2, *то он расходится в любой точке* x, *удовлетворяющей условию*

$$|x| > |x_2|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из теоремы 1 $\Rightarrow$ $\exists\ R>0$ *такое, что ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится* (*абсолютно*) *при* $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$.

Число R называют ***радиусом сходимости*** ряда $\sum a_n x^n$.

Интервал $(-R\,;R)$ называют ***интервалом сходимости*** ряда $\sum a_n x^n$.

Применяя признак Даламбера (Коши) к исследованию ряда $\sum |a_n x^n|$ находим:

$$R = \frac{1}{\ell}\,, \text{ где } \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad (2)$$

Замечания.

1) Формулы (2) справедливы, если ряд $\sum a_n x^n$ – «полный» (т.е. присутствуют все степени x).
2) Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей числовой оси)
3) Для ряда $\sum a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид:

$$|x - x_0| < R \quad \Leftrightarrow \quad (x_0 - R\,;\ x_0 + R)\,.$$

Если ряд $\sum a_n (x - x_0)^n$ – «полный», то формулы (2) для него тоже справедливы.

2. Свойства степенных рядов

ЛЕММА 2.

Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a;b]$, *целиком лежащем внутри его интервала сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ леммы 2.

Степенной ряд равномерно сходится в интервале сходимости

ЛЕММА 3.

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

имеют один и тот же радиус сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ леммы 3.

Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)''$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'''$, $\ldots$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)^{(k)}$ *имеют тот же радиус сходимости, что и ряд* $\sum a_n x^n$

СЛЕДСТВИЕ леммы 2 и 3.

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)', \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'', \quad \ldots, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)^{(k)}, \quad \ldots$$

равномерно сходятся в интервале сходимости.

Из леммы 2 и 3, их следствий и свойств равномерно сходящихся рядов следует, что степенные ряды обладают свойствами:

1) *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости*.

2) *Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости*.

3) *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз*.

Замечание.

Если конец интервала сходимости входит в область сходимости, то сумма степенного ряда будет в этой точке непрерывна, т.к. справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (Абеля о сумме степенного ряда на концах интервала сходимости).

Пусть ряд $\sum a_n x^n$ *сходится на* $(-R\,;R)$ *к функции* $S(x)$.

Если ряд сходится на концах интервала сходимости, то его сумма в этих точках равна соответственно

$$S(-R)=\lim_{x\to -R+0} S(x),$$

$$S(R)=\lim_{x\to R-0} S(x).$$

§3. Разложение функции в степенной ряд

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что функция* $f(x)$ *разложима в ряд на промежутке* X *, если* $\exists$ *функциональный ряд* $\sum f_n(x)$, *суммой которого на* X *является* $f(x)$.

ЗАДАЧИ:

1) Найти условия, при которых функция $f(x)$ разложима в степенной ряд.
2) Указать этот степенной ряд.

Пусть $f(x)$ – бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0*** *(по степеням $x - x_0$) называется степенной ряд вида*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ряд Тейлора функции $f(x)$ по степеням x (т.е. $x_0 = 0$)

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

называют ***рядом Маклорена***

ТЕОРЕМА 1 (о разложении функции в степенной ряд).

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0, то этот ряд является ее рядом Тейлора по степеням $x-x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечание.

Существование для функции ряда Тейлора не гарантирует разложение функции в степенной ряд.

Сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ может не совпадать с самой функцией $f(x)$.

Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируема в окрестности x_0.
$\Rightarrow$ для $f(x)$ можно записать ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Пусть $S_n(x)$ – n-я частичная сумма этого ряда, т.е.

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$S_n(x)$ называют ***многочленом Тейлора функции f(x) по степеням x – x*** $\boldsymbol{_0}$.

Пусть $$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

$R_n(x)$ называют ***остаточным членом ряда Тейлора***.

ТЕОРЕМА 2 (необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ *для функции* $f(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).

Если $f(x)$ *бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности* x_0 *и все ее производные ограничены в совокупности, то* $f(x)$ *разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора по степеням* $x - x_0$.

§4. Ряды Маклорена некоторых элементарных функций

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < +\infty$

2) $\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x$

3) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Доказать самостоятельно:

4) $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x$$

5) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

6) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad -1<x\le 1$$

Доказать самостоятельно:

7) $$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad -1\le x\le 1$$

$$8)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad -1 < x < 1$$