Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Основные понятия теории рядов***

Лектор Янущик О.В.

2018 г.

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука,1981.
2. Данко П.Е., Попова А.,Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях. – М.: высшая школа, 1980.
3. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971.
4. Кошельская Г.А., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика (часть IV). Ряды. Учебное пособие. – Томск: изд-во ТПУ, 2001.
5. Ряды и комплексный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е. А. Молдованова, А. Н. Харлова, В. В. Ласуков; Томский политехнический университет (ТПУ). — Томск: Изд-во ТПУ, 2009 Ч. 2 : Функции комплексного переменного. —
Режим доступа: http://www.lib.tpu.ru/fulltext2/m/2009/m64.pdf

Глава 1. Числовые ряды

§1. Основные понятия теории числовых рядов

1. Основные определения

Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Выражение вида*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\mathrm{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют ***числовым рядом***.

При этом, члены последовательности $\{u_\mathrm{n}\}$ называются ***членами ряда*** (1-м, 2-м, …, n-м (общим членом))

Если начиная с некоторого номера N для членов ряда справедливо равенство

$$u_{N} = u_{N+1} = u_{N+2} = \ldots = 0\ ,$$

то ряд называют ***конечным***. В противном случае ряд называется ***бесконечным*** **.**

Ряд $\sum u_n$ называют

- ***знакоположительным***, если $u_n \geq 0\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ;$
- ***знакоотрицательным***, если $u_n \leq 0\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ;$
- ***знакопостоянным***, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда $\sum u_n$ запишем последовательность

$$S_1 = u_1\,, \quad S_2 = u_1 + u_2\,, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n\,, \quad \dots$$

Числа $S_1, S_2, \dots, S_n$ называют ***частичными суммами ряда*** $\sum u_n$ (1-й, 2-й, …, n-й).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Ряд $\sum u_n$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{ S_n \}$.*

*При этом, число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют **суммой ряда** $\sum u_n$.*

*Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \nexists \right)$ то говорят, что ряд $\sum u_n$ **расходится** и не имеет суммы.*

Если S – сумма ряда $\sum u_n$, то записывают: $\sum u_n = S$.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЯДОВ

1) Рассматривается в математическом анализе:

Определить, сходится или расходится заданный ряд

(говорят: «исследовать ряд на сходимость»)

2) Рассматривается в вычислительной математике:

Найти сумму сходящегося ряда.

Найти точное значение суммы S сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают $S \approx S_n$ где n выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число R_n называют ***остатком ряда***.

2. Основные свойства числовых рядов

ТЕОРЕМА 1.3.

Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.

1) ***Произведением ряда*** $\sum u_n$ ***на число*** $c \in \mathbb{R}$ *называется ряд*

$$\sum c \cdot u_n .$$

2) ***Суммой (разностью) рядов*** $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *называется ряд*

$$\sum (u_n + v_n) \quad [\, \sum (u_n - v_n)\,].$$

ОБОЗНАЧАЮТ: $c \cdot \sum u_n$ – произведение ряда на число c ;

$\sum u_n \pm \sum v_n$ – сумма (разность) рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$

ТЕОРЕМА 1.5 (об арифметических действиях над сходящимися рядами)

Если ряд $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* U,

ряд $\sum v_n$ *сходится и его сумма равна* V,

то а) *ряд* $\sum c u_{\mathrm{n}}$ – *сходится и его сумма равна* cU $(\forall c \in \mathbb{R})$;

б) *ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *сходится и его сумма равна* $U \pm V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЯ теоремы 1.5.

1) *Если* $\sum u_n$ *расходится, то* $\forall c \neq 0$ $(c \in \mathbb{R})$ *ряд* $\sum c u_{\mathrm{n}}$ – *тоже расходится*.
2) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится, а ряд* $\sum v_n$ *расходится, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *расходится*.

ТЕОРЕМА 1.6 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum u_{\mathrm{n}}$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ теоремы 1.6 (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *, то ряд* $\sum u_{\mathrm{n}}$ *расходится.*

ТЕОРЕМА 1.7 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).

Пусть ряд $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* U

Если сгруппировать члены этого ряда, НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА, то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму U.

§2. Сходимость знакоположительных рядов

ЛЕММА 2.1 (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного ряда).

Знакоположительный ряд сходится $\Leftrightarrow$ *последовательность его частичных сумм ограничена*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2.2 (первый признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды, причем*

$$u_n \le v_n\,,\ \ \forall n \ge N\ (N \in \mathbb{N}).$$

Тогда

1) *если ряд* $\sum v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum u_n$ *тоже сходится*;

2) *если ряд* $\sum u_n$ *расходится, то и ряд* $\sum v_n$ *тоже расходится*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2.3 (второй признак сравнения).

Пусть $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ – *знакоположительные ряды.*

Если при $n \to \infty$ *существует конечный и отличный от нуля предел отношения их общих членов, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут себя одинаково по отношению к сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ЭТАЛОННЫЕ РЯДЫ, которые используются в признаках сравнения:

а) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

б) обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad - \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если } \alpha > 1, \\ \text{расходится}, & \text{если } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

в) ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad - \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если } |q| < 1, \\ \text{расходится}, & \text{если } |q| \geq 1. \end{cases}$$