Математический анализ

Раздел: Числовые и функциональные ряды

Тема: ***Сходимость знакопеременных рядов***

Лектор Янущик О.В.

2018 г.

§3. Сходимость знакопеременных рядов

1. Знакочередующиеся ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки, называется* ***знакочередующимся***.

Будем считать, что 1-й член знакочередующегося ряда положителен.

$\Rightarrow$ знакочередующийся ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum (-1)^{n+1} \cdot u_n , \qquad (1)$$

где $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1 (признак сходимости Лейбница).

Пусть знакочередующийся ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ *удовлетворяет условиям:*

1) *члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Тогда ряд $\sum(-1)^{n+1} \cdot u_n$ *сходится, причем его сумма* S *положительна и не превосходит первого члена ряда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечания.

1) Ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ будет сходиться и в том случае, когда условие 1 теоремы Лейбница выполняется, начиная с некоторого номера N. Но утверждение о сумме ряда в этом случае не будет иметь места.

2) Если ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то погрешность, получаемая при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n, не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, т.е.

$$|R_n| = |S - S_n| < u_{n+1}$$

3) Если ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ не удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, то он расходится (т.к. не выполнено необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, но не удовлетворяет ее 1-му условию, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

2. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Пусть $\sum u_n$ – знакопеременный ряд.
Рассмотрим ряд $\sum |u_n|$.

ТЕОРЕМА 2 (признак абсолютной сходимости).
Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечание. Признак абсолютной сходимости достаточный, но не необходимый. Т.е. существуют сходящиеся знакопеременные ряды $\sum u_n$, для которых $\sum |u_n|$ – расходится.

ОПРЕДЕЛНИЕ. *Ряд $\sum u_n$ называют* ***абсолютно сходящимся***, *если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.*

Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют ***условно сходящимся***.

СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1) **ТЕОРЕМА 3**.

Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ тоже сходится абсолютно $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

СЛЕДСТВИЕ теоремы 3.

Если ряд $\sum u_n$ – сходятся абсолютно,

$\sum v_n$ – сходятся условно,

то ряд $\sum(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ сходится условно $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) **ТЕОРЕМА 4 (о перестановке членов ряда).**

а) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится абсолютно, то ряд, полученный из него в результате перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.*

б) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится условно, то можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу.*

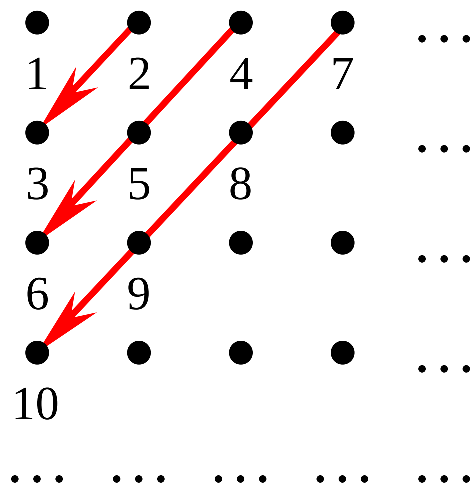
Более того, можно так переставить члены ряда, что получившийся ряд будет расходиться (**теорема Римана**).

Пусть даны два ряда: $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

Составим таблицу из всевозможных парных произведений членов этих рядов:

$$\left.\begin{array}{cccccc} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \dots & u_1v_n & \dots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \dots & u_2v_n & \dots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \dots & u_3v_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right\} \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением рядов*** $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *называют ряд, составленный из элементов таблицы* (2) *в следующем порядке*:



Итак: $\sum u_n \cdot \sum v_n = u_1v_1 + \underbrace{u_1v_2 + u_2v_1} + \underbrace{u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1} + \dots$

3) **ТЕОРЕМА 5 (о сходимости произведения рядов).**

Пусть ряды $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся абсолютно и их суммы равны* U *и* V *соответственно.*

Тогда ряд $\sum u_n \cdot \sum v_n$ *тоже сходится абсолютно и его сумма равна* $U \cdot V$.

ТЕОРЕМА 6 (признак Дирихле).

Пусть 1) *последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) *последовательность частичных сумм ряда* $\sum b_n$ *ограничена*.

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ *– сходится* .

ТЕОРЕМА 7 (признак Абеля).

Пусть 1) $\{a_n\}$ *монотонная и ограниченная*;

2) *ряд* $\sum b_n$ *– сходится*.

Тогда ряд $\sum a_n \cdot b_n$ *– сходится*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно