

Занятие 12. Вычисление интегралов

I. C - кусочно-гладкая кривая, $f(z)$ – определена и непрерывна в области D .

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_C (v(x, y)dx + u(x, y)dy)$$

1) Вычислите интеграл $\int_C (1+i-2\bar{z})dz$ от точки

$z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$ а) по прямой C $(-2+2i)$.
в) по параболе $y = x^2$. $(-1+4/3i)$

с) по ломанной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3 = 1$. (-2)

2) Вычислите интеграл $\int_C (1 + \bar{z})dz$ от точки $z_1 = i \cdot 2$

до точки $z_2 = 2 + 4i$

а) по прямой $C : y = x + 2$. в) по параболе
 $y = \frac{x^2}{2} + 2$.

3) Вычислите интеграл $\int_C (z^2 + z \cdot \bar{z})dz$, где C –
верхняя часть окружности $|z| = 1$. (0.5π)

4) Вычислите интеграл $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, где C

А) часть окружности $|z| = 1$ $(-\pi \leq \varphi \leq 0)$.

В) Γ – отрезок прямой, соединяющей точки
 $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1$.

5) Вычислите интеграл $\int_{AB} z \operatorname{Re} z dz$, где AB
часть параболы от точки $A = (0,0)$ до точки
 $B = (1,2)$ $(-23/20 + i17/20)$

Параметрические уравнения.

1) $\int_C \bar{z} dz$, где C – замкнутой контур $x = \cos t$,

$y = \sin t$.

2) $\int_C \frac{dz}{z^2}$, где C – нижняя полуокружность $|z| = 3$.

II. Формула Ньютона-Лейбница

1. $\int_{AB} \sin z dz$, где AB часть кривой, соединяющей

точки $z_A = 0$ до точки $z_B = -i$. 2. $\int_1^i z e^z dz$.

3. $\int_{AB} \frac{dz}{z}$, где AB часть дуги, не содержащей точку

$z = 0$ соединяющей точки $z_A = 1$ до точки $z_B = i$.

Домашнее

1. Вычислите интеграл $\int_{AB} ((y+1) - xi) dz$, где AB часть прямой, соединяющей точки $z_A = i$ до точки $z_B = -i$. (-2)

2. Вычислите интеграл $\int_{AB} (x^2 + y^2 i) dz$, где AB часть параболы, соединяющей точки $A = 1 + i$ и $B = 2 + i \cdot 3$

3. $\int_C |z| dz$ а) C – отрезок, соединяющей точки

$z_1 = -1$ и $z_2 = 1$. в) C – полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости, причем точка $z_1 = -1$ – начальная и $z_2 = 1$ – конечная.

4. Вычислите интеграл $\int_C \operatorname{Re} z dz$

а) по прямой C от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.
 $(1+i)/2$

б) по ломанной $z_1 z_3 z_2$, где $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$.

5. $\int_{AB} z^2 dz$, где AB часть прямой, соединяющей

точки $z_A = 1$ до точки $z_B = i$.

6. $\int_L \cos^2 z \sin z dz$, где L любая линия, соединяющей

точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \pi$.