Занятие 11.

I. Исследовать функцию на аналитичность и найти её производную.

1. $w = z^3$
2. $w = \sin z$.
3. .$w = z^2 \bar{z}$
4. $w = \ln z$

6. $w = |z|\bar{z}$
7. $w = \sin 3z - i$

Используя теорему: Функция аналитическая,

если $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

1) $w = \bar{z} + z^2$. 2) $w = z^2 + \cos z$ 3) $w = ze^z$

II. Покажите, что если аналитическая функция $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитическая в области D, то $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

III. Найти аналитическую функцию $\omega = f(z)$ по известной её действительной или мнимой части.

1. $u(x, y) = 2e^x \cos y$ при $f(0)=2$.
2. $v(x, y) = arctg \dfrac{y}{x}$ при $f(1)=0$.
3. $v(x, y) = 3x + 2xy$ при $f(-i)=2$.
4. $v(x, y) = 2(chx \sin y - xy)$ при $f(0)=0$.
5. $u(x, y) = 2 \sin xchy$ при $f(0)=0$.

IV. Покажите, что следующие функции гармонические:

1) $u(x, y) = x^2 + 2x - y^2$

2) 3. $u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

3) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. 4. $v(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$

Дома.

1. Вычислите предел $\lim\limits_{z\to\pi/4}\dfrac{\cos 2z}{chiz+ishiz}$.
2. Докажите, что функция $f(z)=\operatorname{Im} z$ непрерывная.
3. Какие из следующих функций являются аналитическими и вычислите производную аналитических функций.

a) $w=\bar{z}\operatorname{Re} z$.

b) $w=|z|\operatorname{Im} z$.

c) $w=chz$

4.Покажите, что если аналитические функции *f*(z) и φ(z) удовлетворяют $f'(z)=\varphi'(z)$, то *f*(z) = φ(z).

5. Покажите, что аналитическая функция ω = *f*(z) в некоторой области действительна, то она постоянна.

6. Покажите, что в области Rez >0 функция ω = *lnz* аналитическая и найти её производную.

7. Найдите сопряженные пары гармонических функций.

1) $u(x,y)=3(x^2-y^2)$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

2) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

3) $u(x,y)=2e^x\cos y+1, v(x,y)=1+e^x\sin y$.

8. Найдите аналитическую функцию $\omega = f(z)$ по известной её действительной или мнимой части.

   1. $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ при $f(i)=2i-1$.
   2. $v(x,y)=2(2shx\sin y+xy)$ при $f(0)=3$.

9. Найдите производную $v(x,y)=\cos z$

10. Покажите, что следующие функции гармонические:

    1. $v(x,y)=\dfrac{x^2+1}{2}y^2$
    2. $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.

Найдите коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $\omega = f(z)$ в точке z_0.

1) $w=z^2$, $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

2) $w=e^z$, $z_0=\ln 2+i\cdot\dfrac{\pi}{4}$.

3) $w=\sin z$, $z_0=\pi+i$.

4) $w=z^3$, $z_0=2-i$. $z_0=1+i\cdot\dfrac{\pi}{2}$

Выясните, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении

1) $w = \ln z$
2) $w = z^3$.
3) $w = \frac{1}{z}$