Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

# Тема: ***Особые точки. Вычеты***

Лектор Янущик О.В.

2017 г.

# § 10. Особые точки

## 1. Изолированные особые точки

Точка $z_0$ , в которой функция $f(z)$ не является аналитической, называется ***особой точкой функции f(z)*** .

Точку, не являющуюся особой для $f(z)$ , называют ***правильной точкой функции f(z)*** .

Точка $z_0$ называется ***изолированной особой точкой функции*** $f(z)$ , если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции $f(z)$ .

Изолированная особая точка $z_0$ называется

а) ***устранимой особой точкой***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$ , где $c \in \mathbb{C}$ ;

б) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ;

в) ***существенно особой точкой***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) - \nexists$

***Замечание.*** Устранимую особую точку можно «устранить», доопределив (переопределив) функцию $f(z)$ равенством

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)=c$$

Новая функция в точке $z_0$ будет аналитической.

## ВЗАИМОСВЯЗЬ ХАРАКТЕРА ОСОБОЙ ТОЧКИ С ВИДОМ РЯДА ЛОРАНА ФУНКЦИИ В ЕЕ ОКРЕСТНОСТИ

### **1) Устранимые особые точки**

ТЕОРЕМА 1 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее устранимой особой точки).

*Изолированная особая точка* $z_0$ *функции* $f(z)$ *является устранимой* $\Leftrightarrow$ *ряд Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $z_0$ *не содержит главной части, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

## 2) Полюсы

Точка $z_0$ называется ***нулем функции*** $\boldsymbol{\varphi(z)}$ если $\varphi(z_0) = 0$ .

Точка $z_0$ называется ***нулем кратности*** ***m*** если

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z), \quad \text{где } g(z_0) \neq 0 .$$

Нуль кратности 1 называется ***простым***.

ТЕОРЕМА 2 (связь полюсов и нулей функций).

*Точка* $z_0$ *является нулем аналитической функции* $\varphi(z)$ $\Leftrightarrow$ $z_0$ – *полюс функции*

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Кратность нуля* $z_0$ *аналитической функции* $\varphi(z)$ *называют* ***кратностью*** (*порядком*) ***полюса*** $\boldsymbol{z_0}$ ***функции***

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

*Полюс кратности* 1 *называют* ***простым***.

ТЕОРЕМА 3 (вид ряда Тейлора функции в окрестности нуля).

*Точка* $z_0$ *является нулем кратности* $m$ *аналитической функции* $\varphi(z)$ $\Leftrightarrow$ *ряд Тейлора функции* $\varphi(z)$ *в окрестности точки* $z_0$ *не содержит первых* $m$ *членов, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (связь кратности нуля с производными функции).

*Точка* $z_0$ *является нулем кратности* $m$ *аналитической функции* $\varphi(z)$ $\Leftrightarrow$

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

$$\varphi^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 5 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее полюса)

*Изолированная особая точка* $z_0$ *функции* $f(z)$ *является полюсом кратности* $m$ $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $z_0$ *содержит только* $m$ *членов, т.е. имеет вид*

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

СЛЕДСТВИЕ 6 (вид функции, имеющей полюс в точке $z_0$)

*Точка* $z_0$ *является полюсом кратности* $m$ *функции* $f(z)$ $\Leftrightarrow$

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

*где* $g(z)$ – *аналитическая в точке* $z_0$ *и* $g(z_0)\neq 0$ .

## 3) Существенно особые точки

ТЕОРЕМА 7 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее существенно особой точки)

*Изолированная особая точка* $z_0$ *функции* $f(z)$ *является существенно особой* $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $z_0$ *содержит бесконечное число членов.*

# 2. Характер точки $\infty$

Говорят, что функция $f(z)$ ***аналитична в окрестности точки*** $\infty$ , если она аналитична в области $|z| > R$ (где $R$ – некоторое число).

***Точка*** $\infty$ ***называется изолированной особой точкой функции*** $f(z)$ если $f(z)$ не имеет особых точек в области $|z| > R$ (где $R$ – некоторое число).

Изолированная особая точка $\infty$ называется

а) ***устранимой особой точкой***, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c$, где $c \in \mathbb{C}$ ;

б) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ ;

в) ***существенно особой точкой***, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) - \nexists$ .

Говорят, что функция $f(z)$ ***разложима в ряд Лорана в окрестности точки*** $\infty$ , если она разложима в ряд Лорана по степеням $z$ в кольце $R < |z| < +\infty$ , т.е.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n , \qquad R < |z| < +\infty$$

При этом

ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ называют ***правильной частью ряда Лорана функции в окрестности*** $\infty$ ,

ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ называют ***главной частью ряда Лорана функции в окрестности*** $\infty$ .

Для точки $\infty$ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки $\infty$)

*Изолированная особая точка* $\infty$ *функции* $f(z)$ *является*

а) *устранимой* $\Leftrightarrow$ *ряд Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $\infty$ *не содержит главной части, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

б) *полюсом кратности* $m$ $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $\infty$ *содержит только* $m$ *членов, т.е. имеет вид*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$$

в) *существенно особой* $\Leftrightarrow$ *главная часть ряда Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $\infty$ *содержит бесконечное число членов.*

# § 11. Вычеты. Основная теорема о вычетах

## 1. Вычет относительно конечной точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вычетом функции f(z) относительно конечной точки*** $\boldsymbol{z_0}$ *называется число, равное*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

*где* $C$ *– любой контур, удовлетворяющий условиям*:

а) $z_0$ *лежит в области* $D$, *внутренней по отношению к* $C$ (т.е. в области, которая остается слева при обходе контура $C$ против часовой стрелки);

б) *в области* $D$ *и на ее границе* $C$ *нет особых точек функции* $f(z)$ *, за исключением может быть точки* $z_0$ .

Обозначают: $\underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z)$

Из определения $\Rightarrow$ если $z_0$ – правильная, то $\underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z)=0$

ТЕОРЕМА 1 (связь вычета функции относительно $z_0 \in \mathbb{C}$ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности $z_0$ ).

*Вычет функции* $f(z)$ *относительно* $z_0 \in \mathbb{C}$ *равен коэффициенту* $a_{-1}$ *разложения функции* $f(z)$ *в ряд Лорана по степеням* $z - z_0$ *в области* $0 < | z - z_0 | < R$ (*где* $R$ *– такое число, что в области* $0 < |z - z_0| < R$ *функция* $f(z)$ *– аналитическая*).

СЛЕДСТВИЕ 2 (о вычете относительно устранимой особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ ).

*Если* $z_0$ *– устранимая особая точка, то* $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$

ТЕОРЕМА 3 (вычисление вычета относительно полюса $z_0 \in \mathbb{C}$ ).

*Если* $z_0 \in \mathbb{C}$ *– полюс кратности* $m$ *функции* $f(z)$ , *то*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_0)^m \cdot f(z) \right]$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (1-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

*Если* $z_0 \in \mathbb{C}$ *– простой полюс функции* $f(z)$ , *то*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[ (z - z_0) \cdot f(z) \right]$$

СЛЕДСТВИЕ 5 (2-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$).

*Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$ *– простой полюс функции* $f(z)$ *и* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , *где* $\varphi(z_0) \neq 0$ . *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (1-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$ ).

*Если* $z_0 \in \mathbb{C}$ *– простой полюс функции* $f(z)$ , *то*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[ (z - z_0) \cdot f(z) \right]$$

СЛЕДСТВИЕ 5 (2-я формула для вычисление вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$ ).

*Пусть* $z_0 \in \mathbb{C}$ *– простой полюс функции* $f(z)$ *и* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , *где* $\varphi(z_0) \neq 0$ . *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

ТЕОРЕМА 7 (вычисление вычета относительно устранимой особой точки $\infty$)

*Если* $\infty$ *– устранимая особая точка функции* $f(z)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}[z^2 \cdot f'(z)]$$

ТЕОРЕМА 8 (вычисление вычета относительно полюса $\infty$)

*Если* $\infty$ *– полюс кратности* $m$ *функции* $f(z)$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}[z^{m+2} \cdot f^{(m+1)}(z)]$$

***Замечание***. Вычисление вычета относительно $\infty$ можно свести к вычислению вычета относительно $z_0 = 0$ если сделать замену

$$z = \frac{1}{t}$$