Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: *Ряды в комплексной плоскости*

Лектор Янущик О.В.

2017 г.

§ 9. Ряды в комплексной плоскости

1. Числовые ряды

Пусть задана последовательность комплексных чисел

$$\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение вида*

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называют ***комплексным числовым рядом***.

При этом, члены последовательности $\{z_n\}$ называются ***членами ряда*** (1-м, 2-м, …, n-м (общим членом))

Построим последовательность

$$S_1 = z_1\,, \quad S_2 = z_1 + z_2\,, \quad \ldots\,, \quad S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n\,, \quad \ldots$$

Числа $S_1, S_2, \ldots, S_n$ называют ***частичными суммами ряда*** $\sum z_n$ (1-й, 2-й, …, n-й).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд* $\sum z_n$ *называется* ***сходящимся***, *если существует конечный предел последовательности его частичных сумм* $\{S_n\}$. *При этом, число*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называют ***суммой ряда*** $\sum z_n$.

Если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (\lim_{n\to\infty} S_n - \nexists)$$

то говорят, что ряд $\sum z_n$ ***расходится*** *и не имеет суммы*.

Пусть задан ряд $\sum z_n = \sum (x_n + iy_n)$

Имеем: $\sum z_n \leftrightarrow \sum x_n$, $\sum y_n$, $\sum |z_n|$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи сходимости рядов $\sum (x_n + iy_n)$, $\sum x_n$, $\sum y_n$).

Ряд $\sum z_n = \sum (x_n + iy_n)$ *сходится к* $z = x + iy \Leftrightarrow$ *сходятся ряды* $\sum x_n$, $\sum y_n$, *причем* x – *сумма ряда* $\sum x_n$, y – *сумма ряда* $\sum y_n$.

Из теоремы 1 следует, что все свойства действительных числовых рядов остаются справедливыми для комплексных числовых рядов:

1) Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.
2) Если ряд $\sum z_n$ сходится и его сумма равна z,
   ряд $\sum w_n$ сходится и его сумма равна w,
   то а) ряд $\sum (z_n \pm w_n)$ – сходится и его сумма равна $z \pm w$;
   б) ряд $\sum c z_n$ – сходится и его сумма равна cz ($\forall c \neq 0 \in \mathbb{C}$).
3) Если ряд $\sum z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$
   (*необходимый признак сходимости ряда*)
4) В любом сходящемся ряде, любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядок, сохраняет сходимость ряда и величину его суммы (*закон ассоциативности для рядов*).

ТЕОРЕМА 2 (признак абсолютной сходимости)

Если ряд $\sum|z_n|$ *сходится, то ряд* $\sum z_n$ *тоже сходится*.

ОПРЕДЕЛНИЕ. *Ряд* $\sum z_n$ *называют* ***абсолютно сходящимся***, *если его ряд модулей* $\sum|z_n|$ *сходится*.

Если ряд $\sum z_n$ – *сходится, а его ряд модулей* $\sum|z_n|$ – *расходится, то ряд* $\sum z_n$ *называют* ***условно сходящимся***.

ТЕОРЕМА 3 (о связи абсолютной сходимости рядов $\sum(x_n + iy_n)$, $\sum x_n$, $\sum y_n$).

Ряд $\sum z_n = \sum(x_n + iy_n)$ *сходится абсолютно* $\Leftrightarrow$ *ряды* $\sum x_n$, $\sum y_n$ *сходятся абсолютно*.

Из теоремы 3 следует, что все свойства действительных абсолютно сходящихся числовых рядов остаются справедливыми для абсолютно сходящихся комплексных числовых рядов:

1) Если ряды $\sum z_n$ и $\sum w_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum(\alpha z_n \pm \beta w_n)$ тоже сходится абсолютно $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C})$.
2) Если ряд $\sum z_n$ сходится абсолютно, то ряд, полученный из него в результате перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

Если ряд $\sum z_n$ сходится условно, то можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу. Более того, можно так переставить члены ряда, что получившийся ряд будет расходиться.

2. Функциональные ряды

Пусть задана последовательность фкп $\{f_n(z)\}$ с общим множеством определения D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение вида*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

называют ***комплексным функциональным рядом***.

При этом, члены последовательности $\{f_n(z)\}$ называются ***членами ряда*** (0-м, 1-м, …, *n*-м (общим членом)).

Пусть $z_0 \in D$. Рассмотрим числовой ряд $\sum f_n(z_0)$.

Если ряд $\sum f_n(z_0)$ сходится, то говорят, что ***ряд*** $\sum f_n(z)$ ***сходится в точке*** z_0.

Множество $D_1 = \{ z_0 \in D \mid \sum f_n(z_0)$ –сходится$\}$

называют ***областью сходимости функционального ряда*** $\sum f_n(z)$.

Функция $f(z)$, определенная на множестве D_1 и такая, что ее значение в любой точке $z_0 \in D_1$ совпадает с суммой числового ряда $\sum f_n(z_0)$, называется ***суммой функционального ряда*** $\sum f_n(z)$ (1-е определение суммы функционального ряда).

Построим последовательность

$S_1(z) = f_1(z)$, $S_2(z) = f_1(z)+f_2(z)$, … , $S_n(z) = f_1(z)+f_2(z)+\ldots+ f_n(z)$, …

Функции $S_1(z)$, $S_2(z)$, … , $S_n(z)$ называются ***частичными суммами ряда*** $\sum f_n(z)$.

Множество $D_2=\{ z_0 \in D \mid \{S_n(z_0)\}$ –сходится$\}$ называют ***областью сходимости функциональной последовательности*** $\{S_n(z)\}$.

Функция $f(z)$, определенная на множестве D_2 и такая, что ее значение в любой точке $z_0 \in D_2$ совпадает с пределом последовательности $\{S_n(z_0)\}$, называется ***пределом функциональной последовательности*** $\{S_n(z)\}$.

Из определения суммы числового ряда, получаем:

а) $D_1 = D_2$;

б) *Предел функциональной последовательности* $\{S_n(z)\}$ *есть сумма ряда* $\sum f_n(z)$ (2-е определение суммы функционального ряда).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Комплексный функциональный ряд* $\sum f_n(z)$ *называется* ***равномерно сходящимся*** *к* $f(z)$ *на множестве* $H \subset D_1$ *, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$| S_n(z) - f(z) | < \varepsilon \ , \ \forall n > N \text{ и } \forall z \in H$$

ТЕОРЕМА 4 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд* $\sum f_n(z)$ *сходится равномерно на множестве* H *к функции* $f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$| S_{n+k}(z) - S_n(z) | = | f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+k}(z) | < \varepsilon \ ,$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$ и $\forall z \in H$.

ТЕОРЕМА 5 (признак равномерной сходимости Вейерштрасса).

Если ряд $\sum f_n(z)$ *мажорируется на* H *сходящимся числовым рядом* $\sum a_n$, *то он сходится на* H *равномерно*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что функциональный ряд* $\sum f_n(z)$ ***мажорируется*** *на множестве* H *числовым рядом* $\sum a_n$, *если* $|f_n(z)| < a_n, \ \forall n$.

СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1) Если $\sum f_n(z)$ сходится на множестве $H \subset \mathbb{C}$ равномерно и $\varphi(z)$ – ограничена на H, то ряд $\sum \varphi(z) f_n(z)$ тоже сходится на H равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) Пусть $\sum f_n(z)$ сходится к $f(z)$ на множестве $H \subset \mathbb{C}$ равномерно, $z_0 \in H$ и существуют $\lim\limits_{z \to z_0} f_n(z) = c_n$

Тогда: а) числовой ряд $\sum c_n$ сходится;

б) сумма ряда $\sum c_n$ равна $c = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

Иначе говоря,

$$\lim_{z \to z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{z \to z_0} f_n(z) \right)$$

3) Если ряд $\sum f_n(z)$ сходится на множестве $H \subset \mathbb{C}$ равномерно и в точке $z_0 \in H$ все функции $f_n(z)$ непрерывны, то сумма ряда $f(z)$ тоже непрерывна в точке z_0 .

4) Если функции $f_n(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой (AB) и ряд $\sum f_n(z)$ сходится на (AB) равномерно к $f(z)$, то этот ряд можно почленно интегрировать вдоль кривой $f(z)$, т.е. справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{(AB)} f_n(z)dz\right) = \int_{(AB)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)dz = \int_{(AB)} f(z)dz$$

5) Если функции $f_n(z)$ аналитичны в области $H\subset\mathbb{C}$ и ряд $\sum f_n(z)$ сходится в H равномерно, то его сумма $f(z)$ тоже является функцией аналитической в H.

6) Если функции $f_n(z)$ аналитичны в области $H \subset \mathbb{C}$ и ряд $\sum f_n(z)$ сходится к $f(z)$ в H равномерно, то этот ряд можно в H дифференцировать почленно любое число раз, т.е. справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right)^{(m)} = f^{(m)}(z)$$

Замечание. Для почленного дифференцирования действительного функционального ряда требуется более сильное условие – равномерная сходимость ряда производных.

3. Степенные ряды

Степенным комплексным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

где $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$. Числа a_n называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Частный случай комплексного степенного ряда – ряд по степеням z:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (1)$$

Будем изучать ряд $\sum a_n z^n$, т.к. результаты на общий случай переносятся заменой $z = z - z_0$.

Степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится хотя бы в одной точке (точке $z = 0$).

ТЕОРЕМА 6 (Абеля для комплексных степенных рядов).

1) *Если степенной ряд* $\sum a_n z^n$ *сходится в точке* $z_1 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в любой точке* z, *удовлетворяющей условию*
$$|z| < |z_1|;$$

2) *Если степенной ряд* $\sum a_n z^n$ *расходится в точке* z_2, *то он расходится в любой точке* z, *удовлетворяющей условию*
$$|z| > |z_2|.$$

Из теоремы 6 $\Rightarrow$ $\exists\ R>0$ такое, что ряд $\sum a_n z^n$ сходится (абсолютно) при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Число R называют ***радиусом сходимости*** ряда $\sum a_n z^n$,

круг $|z| < R$ называют ***кругом сходимости*** ряда $\sum a_n z^n$.

Применяя признак Даламбера (Коши) к исследованию ряда $\sum |a_n z^n|$ находим:

$$R = \frac{1}{\ell}\ , \text{ где } \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad (2)$$

Замечания.

1) Формулы (2) справедливы, если ряд $\sum a_n z^n$ – «полный» (т.е. присутствуют все степени z).
2) Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей комплексной плоскости)
3) Для ряда $\sum a_n (z - z_0)^n$ круг сходимости имеет вид:

$$|z - z_0| < R\ .$$

Если ряд $\sum a_n (z - z_0)^n$ – «полный», то формулы (2) для него тоже справедливы.

СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1) Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, целиком лежащем в круге сходимости.

2) Сумма степенного ряда является функцией аналитической.

3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Получающиеся при этом ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный.

4) Степенной ряд можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в его круге сходимости.

4. Разложение фкп в степенной ряд

Напомним: *говорят, что функция* $f(x)$ *разложима в ряд, если* $\exists$ *функциональный ряд* $\sum f_n(x)$, *суммой которого является* $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая в окрестности точки* z_0. ***Рядом Тейлора функции*** $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 (*по степеням* $z - z_0$) *называется степенной ряд вида*

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ТЕОРЕМА 7 (о разложении фкп в степенной ряд).

Если функция $f(z)$ *аналитична в круге* $|z - z_0| < R_1$ (*где* $R_1 \leq R$, R *– радиус сходимости ряда Тейлора функции* $f(z)$), *то она разлагается в этом круге в степенной ряд, причем этот ряд – ее ряд Тейлора, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in G = \{|z - z_0| < R_1\}$$

Разложения, полученные ранее для функций

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \ln(1+x),\ \frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1-x}$$

остаются справедливыми и в комплексном случае.

Эти разложения записать, вместо x подставить z

5. Ряд Лорана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ряд вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \overset{опр}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (3)$$

называется ***рядом Лорана*** (*по степеням* $z - z_0$, *в окрестности точки* z_0).

Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ *называется* ***правильной частью ряда Лорана***,

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$

называется ***главной частью ряда Лорана***.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, ряд Лорана сходится в кольце

$$r < | z - z_0 | < R ,$$

где $R = \dfrac{1}{\ell}$, $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ или $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{| a_n |}$

$$\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{1}{\ell}, \quad \ell = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{| a_n |} \\ r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| \quad \text{или} \quad r = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{| b_n |} \end{array}\right\} \quad (4)$$

<u>Замечания.</u>

1) Формулы (4) справедливы, если ряд Лорана – «полный» (т.е. присутствуют все степени $z - z_0$).
2) Допускается $r = 0$ (ряд сходится в проколотой окрестности точки z_0) и $R = +\infty$ (ряд сходится во внешности круга $|z - z_0 | < r$).
3) Если $r \geq R$, то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Из свойств функциональных рядов $\Rightarrow$

ТЕОРЕМА 8 (о сумме ряда Лорана).

Сумма ряда Лорана аналитична в кольце его сходимости.

ТЕОРЕМА 9 (о разложении функции в ряд Лорана).

Всякая функция $f(z)$, *аналитическая в кольце* $r < |z - z_0| < R$, *может быть представлена в этом кольце в виде суммы ряда Лорана*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

где $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}$,

C – любая окружность с центром в точке z_0 , лежащая в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Ряд Лорана, о котором идет речь в теореме 9, называется ***рядом Лорана функции*** $f(z)$ ***в окрестности точки*** z_0 (по степеням $z - z_0$).