

Математический анализ

Раздел: Теория функций комплексного переменного

Тема: *Дифференцирование функций комплексного переменного*

Лектор Янущик О.В.

2017 г.

§5. Дифференцирование функции комплексного переменного

1. Производная функции комплексного переменного

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция,

$f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности.

Придадим z_0 приращение Δz такое, что $z_0 + \Delta z \in D(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

(если он существует и конечен).

Обозначают: $w'(z_0)$, $\frac{dw(z_0)}{dz}$, $f'(z_0)$, $\frac{dz(z_0)}{dz}$.

Зависимость $z \rightarrow f'(z)$ является функцией. Ее называют **производной функции $f(z)$** и обозначают:

$$w'(z), \frac{dw(z)}{dz}, f'(z), \frac{df(z)}{dz}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $w = f(z)$ называется **дифференцируемой в точке z_0** , если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно Δz части и бесконечно малой более высокого порядка чем Δz , т.е.

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z, \quad (1)$$

где A – комплексное число, $\alpha = \alpha(z_0, \Delta z)$ – бесконечно малая при $\Delta z \rightarrow 0$.

Замечание. (1) можно записать в виде

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \beta(\Delta z),$$

где $\beta(\Delta z)$ – б.м. более высокого порядка чем Δz .

Слагаемое $A \cdot \Delta z$ в выражении (1) называют **дифференциалом функции $w = f(z)$ в точке z_0** и обозначают: $dw(z_0)$, $df(z_0)$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0)$.

При этом для ее дифференциала в точке z_0 справедливо равенство $dw(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z$. (2)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2. (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)

Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$ 1) $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в $M_0(x_0, y_0)$

2) в точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются условия

Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Замечание. Если $f'(z_0)$ существует, то $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

Имеем: $w = f(z) = \varphi(z, \bar{z})$

ТЕОРЕМА 3. (об условии, эквивалентном условиям Коши – Римана)

Условия Коши – Римана эквивалентны условию $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция элементарная, то для нее условия Коши – Римана выполняются и производная находится по обычным правилам.*

2. Аналитические функции

Областью на комплексной плоскости называют открытое и связное множество.

(т.е. множество, каждая точка которого – внутренняя и любые две точки которого можно соединить линией, целиком лежащей в этом множестве).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(z)$ называется **аналитической в точке z_0** если она дифференцируема в этой точке и во всех точках некоторой окрестности точки z_0 .

Аналитические функции называют также *регулярными, голоморфными, моногенными, правильными*

СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1) Если функция $f(z)$ аналитическая в окрестности точки z_0 , то $f(z)$ непрерывна в этой окрестности.

2) Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в области D , то $f(z) \pm \varphi(z)$ и $f(z) \cdot \varphi(z)$ тоже аналитичны в этой области.

Кроме того, их частное

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

аналитично всюду в области D , где $\varphi(z) \neq 0$.

3) Если функция $f(z): D \rightarrow E$ – аналитична в области D ,
 $\varphi(z): E \rightarrow G$ – аналитична в области E ,
то функция $\varphi(f(z))$ – аналитична в D .

4) Если в окрестности точки z_0 определена аналитическая функция $f(z)$ такая, что $f'(z_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена единственная обратная функция $z = \varphi(w)$, которая будет аналитической в этой окрестности и для которой справедливо равенство

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

5) Пусть $f(z)$ – аналитическая в области D . Тогда:

- а) если $f(z) \neq \text{const}$ в D , то $|f(z)|$ не достигает в D своего наименьшего значения;
- б) если $f(z) \neq 0$ в D , то $|f(z)|$ не достигает в D своего наибольшего значения;
- в) если $f(z) \neq 0$ в D и $f(z)$ непрерывна на границе области D , то $|f(z)|$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе области D .

(принцип максимума модуля)

6) Если $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и $f(z)$ – ограниченная и аналитическая на всей комплексной плоскости, то $f(z) = \text{const}$.

(теорема Лиувилля)

7) Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области D , то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими

Функция $\varphi(x, y)$ называется **гармонической**, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана называются **сопряженной парой гармонических функций** (порядок функций в паре существенен!)

8) Если $f(z)$ – аналитическая в области D , то действительная (мнимая) часть определяет ее с точностью до константы.

9) Пусть $f(z)$ – аналитическая в области D , $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$.
Тогда все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0 при отображении $f(z)$ поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$, и получают одно и то же растяжение, равное $|f'(z_0)|$.

(геометрический смысл производной аналитической функции)