Метод Гаусса
(метод исключения неизвестных)

Две системы называются ***эквивалентными*** (***равносильными***) если их решения совпадают. К эквивалентной системе можно перейти с помощью элементарных преобразований системы.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются преобразования следующего вида:

1) умножение обеих частей уравнения на число $\alpha \neq 0$;

2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число $\alpha \neq 0$;

3) перестановка двух уравнений;

4) вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых уравнений.

Суть метод Гаусса:

а) из всех уравнений системы кроме первого исключается неизвестное x_1;

б) из всех уравнений системы кроме первого и второго исключается неизвестное x_2;

в) из всех уравнений системы кроме первого, второго и третьего исключается неизвестное x_3 и т.д.

В результате система будет приведена к одному из следующих двух видов.

1) Первый возможный вид:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}x_n = \beta_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases} \tag{5}$$

Тогда

$$r(\widetilde{\mathbf{A}}) = r(\widetilde{\mathbf{A}}^*) = n\,,$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (5).

Следовательно, система (5) (а значит и исходная система) совместна и имеет единственное решение.

Находим решение:

а) из последнего уравнения системы (5):

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$$

б) из предпоследнего уравнения системы (5):

$$x_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}}\left(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n}x_n\right) = \frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}}\left(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n}\frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}\right)$$

И т.д. получим последовательно $x_{\text{n-2}}$, $x_{\text{n-3}}$, … , x_1.

2) Второй возможный вид

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{rr}x_r + \ldots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда $$r(\widetilde{\mathbf{A}}) = r(\widetilde{\mathbf{A}}^*) = r < n .$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (6).

Следовательно, система (6) (а значит и исходная система) совместна и имеет множество решений.

Находим решение:

а) Выберем в матрице $\widetilde{\mathbf{A}}$ базисный минор.

Переменные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем ***зависимыми***. Остальные переменные назовем ***независимыми*** (или ***свободными***).

Пусть, например, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – зависимые,

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – свободные.

б) Перепишем систему (6) в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r = \beta_1 - \alpha_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r = \beta_2 - \alpha_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{rr}x_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}x_n \end{cases} \tag{7}$$

Выразим зависимые переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{8}$$

Система (8), в которой зависимые переменные выражены через свободные, называется ***общим решением системы*** (6) (а значит и исходной системы).

Придавая свободным переменным в общем решении конкретные значения, мы можем записать бесконечно много решений системы.

§5. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ называют ***нулевым*** (***тривиальным***).

Если а) $m = n$ и $|\mathbf{A}| = 0$ или б) $m < n$, то $r(\mathbf{A})<n$. Следовательно, такая система имеет множество решений (система имеет ***нетривиальные*** решения)

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – два решения системы линейных уравнений (1), α,β– числа. ***Линейной комбинацией*** этих решений с коэффициентами α и β будем называть упорядоченную последовательность n чисел вида

$$\alpha c_1 + \beta d_1,\ \alpha c_2 + \beta d_2,\ \ldots,\ \alpha c_n + \beta d_n$$

ТЕОРЕМА 1. (критерий существования нетривиальных решений) *СЛОУ обладает нетривиальным решением* ⇔ *когда ранг её основной матрицы меньше числа неизвестных, то есть* r(**A**)<n.

ТЕОРЕМА 2. (свойство решений СЛОУ) *Линейная комбинация конечного числа решений системы линейных однородных уравнений (СЛОУ) тоже является решением этой системы.*

ТЕОРЕМА 3. (существования фундаментальной системы решений) *Пусть r – ранг матрицы системы (1). Если система имеет нетривиальные решения, то найдутся n-r решений таких, что любое другое ее решение будет их линейной комбинацией.*

Решения, о которых идет речь в теореме 3, называются ***фундаментальной системой решений***.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ФСР:

1) находим общее решение системы;
2) записываем любой отличный от нуля определитель Δ, порядка $n-r$;
3) записываем $n-r$ решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы строк определителя Δ. Полученные таким образом $n-r$ решений будут являться фундаментальной системой решений системы.

Пусть дана некоторая система линейных неоднородных уравнений, имеющая множество решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Систему линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

называют ***соответствующей*** системе (2).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– какое-нибудь решение системы* (2). *Любое другое решение системы* (2) *может быть записано как сумма решения* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *и некоторого решения системы* (3). *Иначе говоря, справедливо равенство:*

$$\mathbf{X} = \alpha_1 \mathbf{C}_1 + \alpha_2 \mathbf{C}_2 + \ldots + \alpha_{n-r} \mathbf{C}_{n-r} + \mathbf{C}_{\text{н}}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{X}$ *– матрица-столбец неизвестных,* $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_{n-r}$ *– матрицы-столбцы, элементами которых служат решения из ФСР системы* (3), $\mathbf{C}_{\text{н}}$ *– матрица-столбец, элементами которой является решение* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.