§ 3. Ранг матрицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Минор* M_{k} *матрицы* **A** *называется ее* ***базисным минором****, если он отличен от нуля, а все миноры матрицы* **A** *более высокого порядка* $k+1$, $k+2$, …, t *равны нулю.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Рангом матрицы*** **A** *называется порядок ее базисного минора.*

Обозначают: r(**A**) или rang(**A**).

Методы нахождения ранга матрицы

1) Метод окаймляющих миноров.

Пусть M_s – минор порядка s. ***Окаймляющим минором*** для минора M_s называется любой минор порядка $s+1$, содержащий минор M_s .

ТЕОРЕМА 1. *Если в матрице* **A** *есть минор k-го порядка отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы* **A** *равен k* .

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (***Метод окаймляющих миноров***):

1) Находим в матрице минор M_k порядка k, отличный от нуля (где $k \geq 1$).

2) Ищем его окаймляющий минор M_{k+1} отличный от нуля. Если такого минора не существует, то ранг матрицы равен k. Если окаймляющий минор $M_{k+1} \neq 0$, то рассматриваем окаймляющие миноры для M_{k+1} и т.д.

2) *Метод элементарных преобразований.*

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующего вида:

1) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
2) прибавление к i-й строке (столбцу) k-й строки (столбца), умноженной на число $\alpha \neq 0$;
3) перестановка i-й и k-й строки (столбца);
4) вычеркивание одной из двух пропорциональных или равных строк (столбцов);
5) вычеркивание нулевых строк (столбцов).

Матрица **B** называется ***эквивалентной*** матрице **A** , если она может быть получена из **A** элементарными преобразованиями.

Обозначают: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

ТЕОРЕМА 2. *Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.*

ТЕОРЕМА 3. *Любая матрица* **А** *эквивалентна некоторой треугольной или трапециевидной матрице, не содержащей нулевых и пропорциональных строк. Причем эта треугольная или трапециевидная матрица может быть получена из* **А** *элементарными преобразованиями только строк.*

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (***метод элементарных преобразований***):

1) с помощью элементарных преобразований строк получаем для матрицы **А** эквивалентную треугольную или трапециевидную матрицу **В**;

2) находим в матрице **В** базисный минор и определяем ранг матрицы **В** и матрицы **А** .

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит неизвестные только в первой степени и не содержит произведений неизвестных, т.е. если оно имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, где a_i, b – числа.

a_i называются ***коэффициентами уравнения***, b называется ***свободным членом***.

Если $b = 0$, то уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим через **A** и **A*** следующие матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^{*}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матрицу **A** называют ***основной матрицей*** системы (1), матрицу **A*** – ***расширенной матрицей*** системы (1).

Пусть **X** – матрица-столбец неизвестных, **B** – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения **AX=B**. Его называют ***матричной формой*** системы (1).

Упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется ***решением системы*** (1), если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют ***совместной***. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Система, имеющая единственное решение, называется ***определенной***. Система, имеющая множество решений, называется ***неопределенной***.

ТЕОРЕМА 1 (Кронекера – Капелли). *Система линейных уравнений* (1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.* $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A^*})$.

ТЕОРЕМА 2 (критерий единственности решения). *Система линейных уравнений* (1) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, т.е.* $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A^*}) = n$.

2. Методы решения систем линейных уравнений

Матричный метод.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Обратной*** *к матрице* **А** *называется матрица, обозначаемая* $\mathbf{A}^{-1}$, *такая, что* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1) *Если матрица* **А** *имеет обратную, то* **А** *и* $\mathbf{A}^{-1}$ – *квадратные одного порядка.*

2) *Если обратная матрица существует, то она единственная.*

3) *Если матрица* **А** *имеет обратную, то определитель матрицы* **А** *отличен от нуля.*

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной***.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* **A** *– квадратная матрица. Матрица* **A** *имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель* |**A**| *отличен от нуля. Причем обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *может быть найдена по формуле:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^{T}$$

где **S** *– матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы* **A**, *т.е.*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ *называется* ***союзной*** *(или присоединенной, или взаимной) для матрицы* **A**.

Нахождение решения по формуле $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ *называют* ***матричным методом решения*** *системы.*

Метод Крамера

ТЕОРЕМА 4 (Крамера). *Если в системе линейных уравнений число уравнений* m *и число неизвестных* n *совпадает и* **|A|≠0**, *то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (4)$$

где D=**|A|,** *а* D_i– *определитель, получаемый из определителя* D *заменой его* i*-го столбца на столбец свободных членов.*

Формулы (4) называются ***формулами Крамера***.