

Занятие 1. Матрицы.

1. Даны матрицы.

- 1) Определите их размерность.
- 2) Какие матрицы можно сложить между собой?
- 3) Какие матрицы можно перемножить между собой?
- 4) Какие матрицы можно транспонировать?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = (1 \quad 3 \quad 3), \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$ Найдите

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B}, \mathbf{A} - 4\mathbf{B}, 3\mathbf{A} + 5\mathbf{B}.$$

3. Дано $3 \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & v & 4 \end{pmatrix}.$ Найдите

x, y, z и v .

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ Найдите $2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 5\mathbf{E}.$

Дома.

1. Даны матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1) Определите их размерность.

2) Какие матрицы можно сложить между собой?

Сложить их между собой.

3) Какие матрицы можно перемножить между собой? Найдите все произведения матриц

4) Транспонировать матрицы.

$$2. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите .

a) $3(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) - 4\mathbf{B}^2$.

b) $2\mathbf{A} - 4\mathbf{E} + 5\mathbf{B}$.

$$3. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Найдите } \mathbf{BA}.$$

4. Решить систему матричных уравнений:
$$\begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2\mathbf{X} + 3\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ответ: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

5. Найти $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$$

6. Найти $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k.$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Как изменится произведение \mathbf{AB} матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , если:

7. Переставить i -ю и j -ю строки матрицы \mathbf{A} ?
8. Переставить i -й и j -й столбцы матрицы \mathbf{B} ?
9. К i -й строке матрицы \mathbf{A} прибавить ее j -ю строку, умноженную на число c ?
10. К i -му столбцу матрицы \mathbf{B} прибавить ее j -й столбец, умноженный на число c ?
11. Доказать, что если матрица \mathbf{B} перестановочна с матрицей \mathbf{A} , то она перестановочна и с матрицей $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ (где λ – любое отличное от нуля число).