Математический анализ
Раздел: Функция нескольких переменных

Тема: ***Условные экстремумы ФНП.***

Лектор Янущик О.В.

2017 г.

§21. Условные экстремумы ФНП

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Условным экстремумом функции* n *переменных* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется экстремум этой функции, найденный в предположении, что переменные* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *связаны* m $(m < n)$ *условиями*:

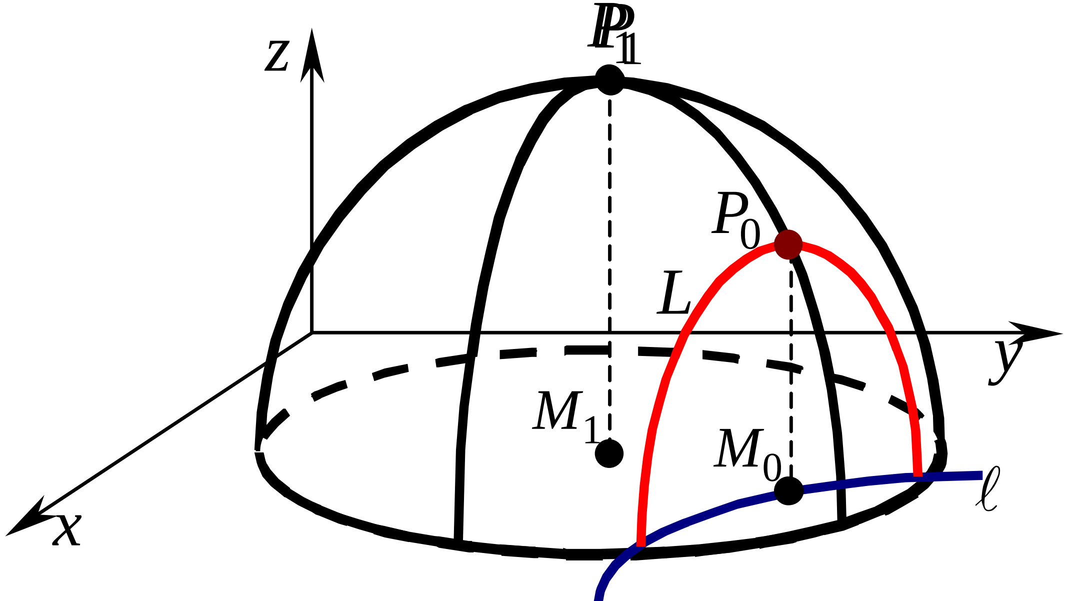
$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Условия (1) называются ***уравнениями связи***.

Обычный экстремум при этом называют ***безусловным экстремумом***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ условного экстремума функции ДВУХ переменных.

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$;



M_1 – точка безусловного экстремума (сравниваем P_1 и точки ее полной окрестности).

Пусть $\ell \subset xOy$ – кривая уравнения связи $\varphi(x,y) = 0$,

L – образ ℓ на поверхности S .

M_0 – точка условного экстремума (сравниваем положение P_0 и точек кривой L) .

ЗАДАЧА. Найти экстремум функции $z = f(x,y)$, при условии, что x и y связаны условием $\varphi(x,y) = 0$.

I способ. **Метод подстановки**.

Из уравнения $\varphi(x,y) = 0$ выразить $y = \psi(x)$ и подставить в $z = f(x,y)$. Тогда условный экстремум – обычный экстремум функции одной переменной $z = f(x, \psi(x))$.

II способ. **Метод Лагранжа**.

Пусть уравнение $\varphi(x,y) = 0$ определяет функцию $y = y(x)$ в неявном виде, $f(x,y)$ – дифференцируемая.

Необходимые условия условного экстремума функции 2-х переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

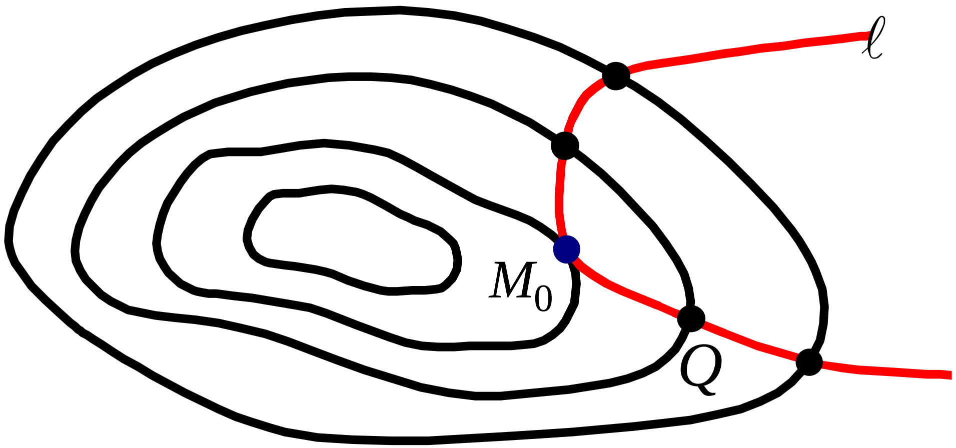
***Замечания*.**

1) Условия (5) – необходимые условия экстремума функции 3-х переменных $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$.

$F(x,y,\lambda)$ называют ***функцией Лагранжа***, λ – ***множителем Лагранжа*** .

2) ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ метода Лагранжа.

Рассмотрим линии уровня $f(x,y) = C_1$, …, $f(x,y) = C_k$ функции $z = f(x,y)$ и кривую $\varphi(x,y) = 0$ (кривую ℓ).



Точка Q не является точкой условного экстремума, т.к. в ее окрестности функция принимает значения как больше C_i , так и меньше C_i .

Точка условного экстремума M_0 – точка в которой ℓ ***касается*** некоторой линии уровня $f(x,y) = C_m$.

$\Rightarrow$ В точке условного экстремума касательная к линии уровня $f(x,y) = C_m$ и к ℓ – общая.

Угловой коэффициент касательной к линии уровня $f(x,y) = C_m$ в точке M_0:

$$k_1 = -\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)}.$$

Угловой коэффициент касательной к линии ℓ в точке M_0:

$$k_2 = -\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}.$$

Так как $k_1 = k_2$, то

$$-\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)} = -\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'_x(M_0)}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = -\lambda,$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(M_0) = -\lambda\varphi'_x(M_0), \qquad f'_y(M_0) = -\lambda\varphi'_y(M_0),$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0, \qquad f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0.$$

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – критическая точка условного экстремума,

$$M_0(x_0,y_0) \leftrightarrow \lambda_0 .$$

$f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ – 2 раза дифференцируемы в окрестности M_0.

Чтобы определить, имеется ли в M_0 условный экстремум необходимо рассмотреть $\Delta f(M_0)$ с учетом уравнения связи $\varphi(x,y) = 0$.

Имеем: $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$,

где $\varphi(x_0,y_0) = 0$ и $\varphi(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) = 0$.

Тогда

$$\Delta f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) + \lambda_0 \cdot [\varphi(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - \varphi(x_0,y_0)]=$$

$$= \underbrace{[\, f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) + \lambda_0\, \varphi(\, x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)]}_{F(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y,\, \lambda_0)} - \underbrace{[f(x_0,y_0) + \lambda_0\, \varphi(x_0,y_0)]}_{F(x_0,\, y_0,\, \lambda_0)} .$$

$$\Rightarrow \Delta f(M_0) = \Delta_{x,y} F(x_0,y_0,\lambda_0)$$

Таким образом, *приращение функции* $\Delta f(M_0)$ *с учетом уравнения связи* $\varphi(x,y) = 0$ *совпадает с приращением функции* **2-х *переменных*** $F(x,y,\lambda_0) = f(x,y) + \lambda_0 \cdot \varphi(x,y)$.

Пусть $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ – 2 раза дифференцируемы в окрестности M_0.

Тогда $F(x,y,\lambda_0)$ тоже 2 раза дифференцируема в окрестности M_0 и, следовательно,

$$\Delta F(x_0, y_0, \lambda_0) \approx \frac{d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{2!}.$$

$\Rightarrow$ знак $\Delta F(x_0,y_0,\lambda_0)$ и знак квадратичной формы $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)$ совпадают (здесь $F(x,y,\lambda_0)$ – **функция 2-х переменных** x,y).

Замечание.

При рассмотрении $\mathrm{d}^2F(x_0,y_0,\lambda_0)$ следует учитывать, что dx, dy связаны соотношением

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$$

Таким образом, *критическая точка* M_0 *является точкой условного экстремума, если в этой точке второй дифференциал функции* ***<u>2-х переменных</u>*** x,y

$$F(x,y,\lambda_0) = f(x,y) + \lambda_0 \cdot \varphi(x,y)$$

является знакоопределенной квадратичной формой (при условии что dx, dy связаны соотношением $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$).

А именно:

1) если $d^2F(M_0,\lambda_0)$ отрицательно определена, то M_0 – точка условного максимума;
2) если $d^2F(M_0,\lambda_0)$ положительно определена, то M_0 – точка условного минимума.

Обобщая полученные результаты на функцию n переменных получим следующее.

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия условного экстремума функции n переменных).

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в точке* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ *имеет условный экстремум, то* M_0 *является стационарной точкой функции*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = f(M) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(M) + \ldots + \lambda_m \cdot \varphi_m(M),$$

где $\varphi_1(M) = 0, \ldots, \varphi_m(M) = 0$ – *уравнения связи*.

Наличие в критической точке M_0 экстремума определяют по знаку приращения функции n переменных

$$\Delta F(M_0, \lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}) \approx \frac{d^2 F(M_0, \lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m})}{2!},$$

где $\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}$ – фиксированные значения множителей Лагранжа, соответствующие точке M_0.

Для функции 2-х переменных справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие условного экстремума функции 2-х переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – *критическая точка для условного экстремума функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0,y_0)$ *функция* $F(x,y,\lambda_0)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно*.

Обозначим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & F''_{xx}(M_0) & F''_{xy}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & F''_{xy}(M_0) & F''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) *если* $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 – *условный минимум* ;

2) *если* $\Delta < 0$, *то в точке* M_0 – *условный максимум* ;

3) *если* $\Delta = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования*.

§22. Скалярное поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* G *– некоторая область в пространстве* $Oxyz$ [*на плоскости* xOy]. *Говорят, что на* G *задано* ***скалярное поле****, если в каждой точке* $M \in G$ *определена функция* 3-*x переменных* $u = f(M)$ [*функция* 2-*x переменных* $z = f(M)$].

Поведение скалярного поля характеризуют

1) производная по направлению;

2) градиент.

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x,y)$ определена в области $D \subseteq xOy$,

$M_0(x_0,y_0) \in D$,

$\bar{\mathbf{s}}$ – некоторый вектор.

Пусть $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, такая, что $\overline{\mathbf{M_0 M}} \upuparrows \bar{\mathbf{s}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если существует и конечен*

$$\lim_{|M_0M|\to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{z(M)-z(M_0)}{|M_0M|}$$

то его называют ***производной функции*** $z = f(x,y)$ ***в точке*** $M_0(x_0,y_0)$ ***по направлению вектора*** $\bar{\mathbf{s}}$.

Обозначают:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial s}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial \ell}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

$\dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – средняя скорость изменения функции $z = f(x,y)$ на отрезке M_0M.

$\Rightarrow \lim\limits_{|M_0M|\to 0} \dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – скорость изменения функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Так же как и для функции одной переменной доказывается, что

1) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} > 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ возрастает;

2) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} < 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ убывает;

3) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0$, то в направлении вектора $\bar{\mathbf{s}}$ функция не изменяется.

$\Rightarrow$ направление вектора $\bar{\mathbf{s}}$ – направление линии уровня функции, проходящей через точку M_0
(вектор $\bar{\mathbf{s}}$ является касательным к линии уровня в точке M_0).

***Замечание*.**

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. А именно:

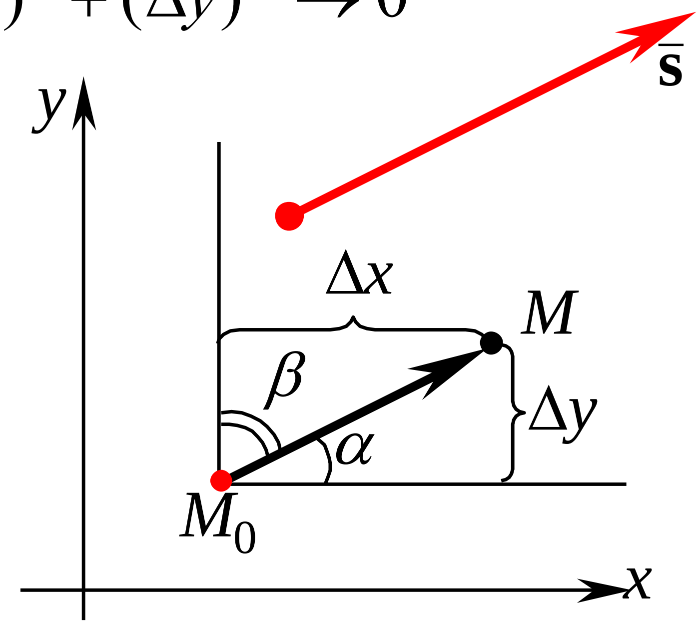
1) $f'_x(M_0)$ – производная функции по направлению вектора **i** (направлению оси Ox);

2) $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора **j** (направлению оси Oy).

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \mu \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

где μ – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$



Обозначим $|M_0M| = \rho$. Тогда

$\Delta x = \rho \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \rho \cdot \cos\beta$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Следовательно,

$$\Delta z(M_0) = f_x'(x_0, y_0)\rho\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\rho\cos\beta + \mu \cdot \rho$$

Разделив на $|M_0M| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$\lim_{|M_0M| \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho \to 0}\left(f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\cos\beta + \mu\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

Замечание. Аналогично определяется и обозначается производная по направлению для функции 3-х переменных $u = f(x,y,z)$. Для нее получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{s}}$.

2. Градиент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$*** *называется вектор с координатами*

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0).$$

Обозначают: **grad**$z(M_0)$.

СВОЙСТВА ГРАДИЕНТА

1) **grad**$z(M_0)$ определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью.

   При этом | **grad**$z(M_0)$ | равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0.

2) **grad**$z(M_0)$ перпендикулярен к линии уровня функции $z = f(x,y)$, проходящей через точку M_0.

Замечание. Для функции 3-х переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.