Математический анализ
Раздел: Введение в анализ

Тема: ***Предел функции***

(односторонние пределы, замечательные пределы, сравнение бесконечно малых и бесконечно больших)

Лектор Янущик О.В.

2015 г.

4. Односторонние пределы. Условие существования $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $\boldsymbol{x}$***, стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ ***слева*** **(*в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ ***слева*)**, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что если x удовлетворяет условию*

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то $$f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

2) *Число* $B \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $\boldsymbol{x}$***, стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ ***справа***, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что если x удовлетворяет условию*

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

то $$f(x) \in U(B, \varepsilon).$$

3) *Говорят, что* ***предел функции** $f(x)$ **в точке** x_0 **слева равен** $+\infty$ $(-\infty)$* **(*функция стремится к*** $+\infty$ $(-\infty)$ ***при*** x**,** ***стремящемся к*** x_0 ***слева*)**, *если* $\forall M>0$ $\exists\delta>0$ *такое, что если* x *удовлетворяет условию*

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то $$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

4) *Говорят, что* ***предел функции** $f(x)$ **в точке** x_0 **справа равен** $+\infty$ $(-\infty)$*, *если* $\forall M>0$ $\exists\delta>0$ *такое, что, если* x *удовлетворяет условию* $$0 < x - x_0 < \delta,$$

то $$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

Обозначают:

$$f(x_0-0), \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$ – предел $f(x)$ в точке x_0 слева,

$$f(x_0+0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$ – предел $f(x)$ в точке x_0 справа.

Если $x_0 = 0$, то пределы слева и справа обозначают:

$$f(-0), \quad \lim_{x\to -0} f(x) \quad \text{è} \quad f(+0), \quad \lim_{x\to +0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 5 (необходимое и достаточное условие существования предела $f(x)$ при $x \to x_0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$).

Функция $f(x)$ имеет предел (конечный) при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ существуют конечные и равные между собой односторонние пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0$. При этом

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечания.

1) Определение одностороннего предела дано на языке ε-δ. Определение одностороннего предела на языке последовательностей дается так же как и предела при $x \to x_0$ с той лишь разницей, что рассматриваются только $\{x_n\} \to x_0$, $x_n < x_0$ в случае левого предела и $\{x_n\} \to x_0$, $x_n > x_0$ в случае правого предела.
2) Все свойства пределов и бесконечно больших остаются справедливыми и для односторонних пределов.

5. Замечательные пределы

Название ***замечательных пределов*** в математическом анализе получили следующие два утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – второй замечательный предел.

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА
(доказать самостоятельно)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА
(доказать самостоятельно)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{a}(1+x)}{x/\ln a}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x\ln a}=1$

Замечание. Из формулы замены переменной $\Rightarrow$ 1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо x будет стоять любая б.м. функция $\alpha(x)$.

6. Сравнение б.м. и б.б. функций

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой более высокого порядка чем*** $\boldsymbol{\beta(x)}$ *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Записывают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2) $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***бесконечно малыми одного порядка***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0 .$$

Записывают: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

3) $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***эквивалентными***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Записывают: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) $\alpha(x)$ ***называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\beta(x)$,*** *если бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $(\beta(x))^k$ *имеют один порядок, т.е. если*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C, \quad \text{где } C\in\mathbb{R} \text{ и } C\neq 0 .$$

ТЕОРЕМА 6 (о замене бесконечно малых на эквивалентные).

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ – *б.м. при* $x\to x_0$. *Если*

$$\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\ \beta(x)\sim\beta_1(x),$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

ТЕОРЕМА 7 (о главной части бесконечно малой).

Пусть $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ – *б.м. при* $x\to x_0$, *причем* $\beta(x)$ – *б.м. более высокого порядка чем* $\alpha(x)$. *Тогда*

$$\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)\sim\alpha(x) .$$

Б.м. $\alpha(x)$ называют в этом случае ***главной частью бесконечно малой $\gamma(x)$*** .

Замечание. Из 1-го и 2-го замечательных пределов и их следствий $\Rightarrow$ **если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$**, то

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\ln\left(1+\alpha(x)\right) \sim \alpha(x)$$
$$\log_a\left(1+\alpha(x)\right) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$
$$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$$
$$a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$$
$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\left(\alpha(x)\right)^2}{2}$$

(таблица эквивалентных бесконечно малых)

Аналогично бесконечно малым сравниваются и бесконечно большие функции.

А именно, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to x_0$, то

1) $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой более высокого порядка чем*** $\boldsymbol{g(x)}$ *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2) $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***бесконечно большими одного порядка****, если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0\,;$$

3) $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***эквивалентными бесконечно большими*** (записывают: $f(x) \sim g(x)$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4) $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой порядка k относительно бесконечно большой*** $\boldsymbol{g(x)}$***,*** *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\left(g(x)\right)^k} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0\,.$$

ТЕОРЕМА 8 (о замене бесконечно больших на эквивалентные).

Пусть $f(x)$, $g(x)$, $f_1(x)$, $g_1(x)$ – б.б. при $x \to x_0$. Если

$$f(x) \sim f_1(x)\ ,\ g(x) \sim g_1(x),$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

ТЕОРЕМА 9 (о главной части бесконечно большой).

Пусть $f(x)$ *и* $g(x)$ *– б.б. при* $x \to x_0$, *причем* $g(x)$ *– бесконечно большая более высокого порядка чем* $f(x)$. *Тогда*

$$z(x) = f(x) + g(x) \sim g(x)\ .$$

Б.б. $g(x)$ называют в этом случае ***главной частью бесконечно большой*** $z(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно